Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach

Prírodovedecká fakulta

Ústav matematických vied

Metrické vlastnosti euklidovského priestoru

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Košice, 2004 **Zuzana Medviďová**

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry.

Košice, apríl 2004 ....

vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Touto cestou ďakujem RNDr. Jaroslavovi Ivančovi, CSc., vedúcemu diplomovej práce, za cenné rady, pripomienky a podnety, ktoré mi poskytol pri vypracovávaní diplomovej práce.

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať mojim rodičom, za ich podporu, ktorou ma sprevádzali počas celého vysokoškolského štúdia.

Abstrakt

Táto diplomová práca sa zaoberá štúdiom metrických vlastností euklidovského priestoru. Okrem teoretického odvodenia jednotlivých vlastností obsahuje riešené príklady týkajúce sa danej problematiky. Jej súčasťou sú aj neriešené úlohy s výsledkami.

Abstract

This diploma work deals with metric characteristics of euclidean space. It contains a theoretical deduction of individual characteristics and some solved examples related to given problematics. It also includes unsolved tasks with their solutions.

Obsah

Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce bolo spracovať metrické vlastnosti euklidovského priestoru a pripraviť tak učebný text s riešenými príkladmi a neriešenými úlohami pre študentov stredných škôl.

Práca je rozčlenená do piatych kapitol a kapitoly do jednotlivých podkapitol. Každá podkapitola obsahuje riešený vzorový príklad a úlohy na samostatné riešenie s výsledkami. Je bohato ilustrovaná obrázkami a príkladmi na lepšie pochopenie významu viet a definícií.

Na začiatku práce sú definované pojmy a označenia, ktoré budeme v práci používať. Predpokladáme, že študentom sú známe pojmy a vlastnosti geometrických útvarov netýkajúce sa metrických vlastností.

V prvej kapitole je definovaná veľkosť vektora, skalárny súčin vektorov, vektorový súčin vektorov a zmiešaný súčin vektorov. Na tieto pojmy sa odvolávame v ďalších kapitolách.

Druhá kapitola je venovaná odchýlke dvoch priamok, priamky a roviny a dvoch rovín.

Tretia kapitola sa zaoberá vzdialenosťou dvoch množín, konkrétne vzdialenosťou bodov, priamok a rovín.

Posledné dve kapitoly sú venované obsahom mnohouholníkov a objemom mnohostenov. Pri obsahoch mnohouholníkov sa sústredíme najmä na obsah trojuholníka, ktorý potom využívame pri výpočte obsahu mnohouholníka. Pri objemoch mnohostenov sa zaoberáme najmä objemom štvorstena, ktorý zase využívame pri výpočte objemu mnohostena.

Pojmy a označenia

Budeme pracovať v euklidovskej rovine a euklidovskom trojrozmernom priestore. Symbolom $\mathbb{E}_n$, $n \in \{2, 3\}$ budeme označovať euklidovskú rovinu (pre $n = 2$), euklidovský trojrozmerný priestor (pre $n = 3$).

Zároveň prepokladáme, že v $\mathbb{E}_n$ je daná karteziánska sústava súradníc, teda každému bodu X v tejto sústave súradníc je priradená usporiadaná n-tica reálnych čísel $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde x_i je i-tá súradnica bodu X. A naopak každej usporiadanej n-tici reálnych čísel odpovedá práve jeden bod priestoru $\mathbb{E}_n$. Teda bod X budeme stotožňovať s usporiadanou n-ticou $[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Body označujeme veľkými písmenami, ich súradnice malými písmenami. Súradnice bodu budeme písať do hranatých zátvoriek, napríklad bod $P = [p_1, p_2]$ označuje bod euklidovskej roviny, bod $Q = [q_1, q_2, q_3]$ označuje bod euklidovského trojrozmerného priestoru.

Vzdialenosť dvoch bodov $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ euklidovského priestoru je definovaná predpisom

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}. \tag{1}$$

Takto definovaná vzdialenosť má nasledujúce vlastnosti

$$(\forall A, B \in \mathbb{E}_n)\ d(A, B) \geq 0, \tag{2}$$

$$(\forall A, B \in \mathbb{E}_n)\ d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \tag{3}$$

$$(\forall A, B \in \mathbb{E}_n)\ d(A, B) = d(B, A), \tag{4}$$

$$(\forall A, B, C \in \mathbb{E}_n)\ d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C). \tag{5}$$

Úsečku s krajnými bodmi A, B označujeme $\overline{AB}$. Orientovanú úsečku so začiatkom v bode A a koncom v bode B budeme označovať $\overrightarrow{AB}$. Opačne orientovanú úsečku k orientovanej úsečke $\overrightarrow{AB}$ budeme označovať $-\overrightarrow{AB}$.

Priamku p, ktorá prechádza bodom A a má smerový vektor $\vec{u}$ budeme stručne označovať symbolom $p(A, \vec{u})$. Priamku $p = \{[x, y];\ ax + by + c = 0\}$ budeme zjednodušene zapisovať $p : ax + by + c = 0$.

Rovinu ρ, ktorá prechádza bodom A a má smerové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ budeme stručne označovať symbolom $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$. Rovinu $\rho = \{[x, y, z] : ax + by + cz + d = 0\}$ budeme zjednodušene zapisovať $\rho : ax + by + cz + d = 0$.

Podobne ako bodu, aj vektoru euklidovského priestoru je v karteziánskej sústave súradníc priradená práve jedna usporiadaná n-tica reálnych čísel. Navyše každej usporiadanej n-tici reálnych čísel odpovedá práve jeden vektor. Vektory budeme stotožňovať s usporiadanými n-ticami.

Vektory budeme označovať malými písmenami so šípkou napríklad $\vec{s}$. Na rozlíšenie vektorov od bodov budeme súradnice vektorov písať do okrúhlych zátvoriek t.j. $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, kde s_i je i-tá súradnica vektora $\vec{s}$. Nulový vektor budeme označovať symbolom $\vec{o}$. Násobok vektora $\vec{u}$ reálnym číslom α budeme označovať $\alpha\vec{u}$. Opačný vektor k vektoru $\vec{a}$ budeme označovať $-\vec{a}$. Množinu všetkých vektorov priestoru $\mathbb{E}_n$ označujeme $\mathbb{V}_n$.

1 Základné vlastnosti vektorov

1.1 Veľkosť vektora

Definícia 1.1.1 *Veľkosť vektora $\vec{v}$ je vzdialenosť koncových bodov ľubovoľnej orientovanej úsečky, ktorá vektor $\vec{v}$ reprezentuje.*

Obr. 1: Veľkosť vektora $\vec{v}$

Poznámka. Ak vektor $\vec{v}$ je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, tak veľkosť vektora $\vec{v}$ je vzdialenosť bodov A a B (viď obr.1).

Veľkosť vektora $\vec{v}$ budeme označovať $\|\vec{v}\|$.

Veta 1.1.1 *Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{V}_n$. Potom*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}. \tag{6}$$

Dôkaz. Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je ľubovoľný vektor z $\mathbb{V}_n$ a nech $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ je ľubovoľný, ale pevný bod priestoru $\mathbb{E}_n$. Položme $B = A + \vec{v}$, teda $B = [a_1 + v_1, a_2 + v_2, \ldots, a_n + v_n]$.

Podľa definície 1.1.1 a definície vzdialenosti dvoch bodov dostávame

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= d(A, B) = \\ &= \sqrt{(a_1 + v_1 - a_1)^2 + (a_2 + v_2 - a_2)^2 + \cdots + (a_n + v_n - a_n)^2} = \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 1.1.1 Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{u} = B - A$, ak $A = [1, 2, 1]$ a $B = [3, 3, 4]$.

Riešenie. Pre vektor $\vec{u}$ platí

$$\vec{u} = B - A = (3 - 1, 3 - 2, 4 - 1) = (2, 1, 3).$$

Podľa vety 1.1.1 máme

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Veta 1.1.2 *Pre veľkosť vektora platí*
(1) $(\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \|\vec{v}\| \geq 0$,
(2) $(\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{o}$,
(3) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$,
(4) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Dôkaz. (1) Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je ľubovoľný vektor z $\mathbb{V}_n$.
Podľa vety 1.1.1 platí

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \geq 0.$$

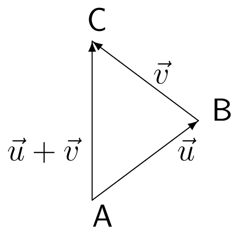
(2) Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je ľubovoľný vektor z V_n.
Podľa vety 1.1.1 dostávame

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Veľkosť vektora je teda rovná nule vtedy a len vtedy, ak súradnice vektora $\vec{v}$ sú nulové, čiže ak $\vec{v} = \vec{o}$.
(3) Nech $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je ľubovoľný vektor z $\mathbb{V}_n$.
Keďže pre α násobok vektora $\vec{v}$ platí $\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$, potom podľa vety 1.1.1 máme

$$\begin{aligned} \|\alpha\vec{v}\| &= \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + \cdots + (\alpha v_n)^2} = \\ &= |\alpha|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = \\ &= |\alpha|\|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

(4) Nech $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú ľubovoľné vektory z $\mathbb{V}_n$ a nech A je ľubovoľný, ale pevný bod priestoru $\mathbb{E}_n$.



Položme
$B = A + \vec{u}$,
$C = B + \vec{v}$.
Čiže $\vec{u} = B - A,\ \vec{v} = C - B$,
$\vec{u} + \vec{v} = C - A$.

Podľa definície 1.1.1 platí $\|\vec{u}\| = d(A, B),\ \|\vec{v}\| = d(B, C)$ a $\|\vec{u} + \vec{v}\| = d(A, C)$.
Vychádzajúc z vlastností vzdialenosti dvoch bodov získavame

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C) = \|\vec{u} + \vec{v}\|.$$

q.e.d.

Príklad 1.1.2 Na osi x nájdite taký bod C, že vektory $A - C$ a $B - C$ majú rovnakú veľkosť, ak $A = [-4, -3]$ a $B = [2, 3]$.

Riešenie. Keďže bod C leží na osi x, potom existuje reálne číslo c také, že $C = [c, 0]$.

Z toho, že $A - C = (-4 - c, -3)$, $B - C = (2 - c, 3)$ a veľkosť vektorov $A - C$ a $B - C$ je rovnaká, podľa vety 1.1.1 dostávame

$$\begin{aligned} \|(-4 - c, -3)\| &= \|(2 - c, 3)\| \\ \sqrt{(-4 - c)^2 + (-3)^2} &= \sqrt{(2 - c)^2 + 3^2}. \end{aligned}$$

Z toho po úprave máme

$$c = -1.$$

Teda súradnice bodu C sú $[-1, 0]$.

Cvičenia

1.1.1 Určte veľkosť vektora $\vec{v}$, ak

a) $\vec{v} = (3, -\frac{5}{4})$;

b) $\vec{v} = P - Q$, $P = [6, \frac{13}{3}]$ a $Q = [0, 4]$;

c) $\vec{v} = (-4, 8, -8)$;

d) $\vec{v} = B - A$, $A = [-2, 3, 4]$ a $B = [4, -6, 2]$.

1.1.2 Nájdite všetky vektory veľkosti 1, ktoré sú násobkom vektora $\vec{u}$, ak

a) $\vec{u} = (7, 7)$;

b) $\vec{u} = (6, 3, 2)$.

1.1.3 Určte chýbajúcu súradnicu vektora $\vec{u}$, ak

a) $\|\vec{u}\| = 34$, $\vec{u} = (-16, x)$;

b) $\|\vec{u}\| = 14$, $\vec{u} = (-6, 4, x)$;

c) $\|\vec{u}\| = 15$, $\vec{u} = (x, 10, -2)$.

1.1.4 Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, ak $\|\vec{a}\| = 11$, $\|\vec{b}\| = 23$ a $\|\vec{a} + \vec{b}\| = 30$.

1.1.5 Zistite pre aké vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí

a) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$;

b) $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$;

c) $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$;

d) $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|$;

e) $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{b}\| - \|\vec{a}\|$.

Výsledky

1.1.1 a)$\frac{13}{4}$, b)$\frac{5\sqrt{13}}{9}$, c)11, d)12. **1.1.2** a)$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, b) $(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$, $(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$. **1.1.3** a) 30, -30, b) 12,-12, c) 11,-11. **1.1.4** $\vec{u} = 20$. **1.1.5** a) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \geq 0$, b) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \in \langle -1, 0\rangle$, c) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \leq 0$, d) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \in \langle 0, 1\rangle$, e) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k \geq 1$.

1.2 Skalárny súčin vektorov

Definícia 1.2.1 *Nech $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}_n$. Reálne číslo*

$$\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \tag{7}$$

nazývame skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ označujeme $\vec{u} \cdot \vec{v}$, alebo len $\vec{u}\vec{v}$

Veta 1.2.1 *Nech $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{V}_n$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{V}_n$, potom*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n. \tag{8}$$

Dôkaz. Podľa definície 1.2.1 a vety 1.1.1 dostávame

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}((u_1+v_1)^2 + (u_2+v_2)^2 + \cdots + (u_n+v_n)^2 - \\ &\quad -u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_n^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2). \end{aligned}$$

Po jednoduchej úprave máme

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 + \cdots + u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - \\ &\quad -u_1^2 - u_2^2 - \cdots - u_n^2 - v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2) = \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 1.2.1 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak $\vec{u} = (4, 3)$ a $\vec{v} = (1, 7)$.

Riešenie. Podľa vety 1.2.1 platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4.1 + 3.7 = 25.$$

Veta 1.2.2 *Pre skalárny súčin vektorov platí*
(1) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
(2) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$,
(3) $(\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_n)\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,
(4) $(\forall \vec{u} \in \mathbb{V}_n)\ \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$,
(5) $(\forall \vec{u} \in \mathbb{V}_n)\ \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{u} = \vec{o}$,
(6) $(\forall \vec{u} \in \mathbb{V}_n)\ \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$,
(7) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$,
(8) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_n)\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Dôkaz. Podľa vety 1.2.1 v jednotlivých prípadoch máme
(1)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

(2)

$$(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 + \cdots + \alpha u_nv_n = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

(3)

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + \cdots + (u_n + v_n)w_n = \\ &= (u_1w_1 + u_2w_2 + \cdots + u_nw_n) + (v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n) = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

(4)

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2.$$

Výraz $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$ je nezáporný, teda dostávame

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0.$$

(5)

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2.$$

Výraz $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$ je rovný nule práve vtedy a len vtedy, ak súradnice vektora $\vec{u}$ sú rovné nule, teda ak $\vec{u} = \vec{o}$.
(6) Podľa vety 1.2.1 a vety 1.1.1 platí

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1u_1 + u_2u_2 + \ldots + u_nu_n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

(7) Definujme funkciu $f : R \to R$ predpisom $f(t) = (\vec{u} + t\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\vec{v})$. Po roznásobení máme $f(t) = t^2\vec{v} \cdot \vec{v} + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Keďže podľa vlastnosti (4) je $f(t)$ nezáporná pre každé t, potom diskriminant kvadratickej rovnice $t^2\vec{v}\cdot\vec{v}+2t\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{u}=0$ je nekladný. A teda

$$\begin{aligned}(2\vec{u}\cdot\vec{v})^2-4(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{u}) &\leq 0\\ (\vec{u}\cdot\vec{v})^2-\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 &\leq 0\\ (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 &\leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Keďže veľkosť vektora je podľa vety 1.1.2 nezáporné reálne číslo, tak po odmocnení dostávame

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

(8) Podľa definície 1.2.1 a vety 1.1.1 máme

$$\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=\frac{1}{2}(u_1^2+\cdots+u_n^2+v_1^2+\cdots+v_n^2-$$
$$-(u_1-v_1)^2-\cdots-(u_n-v_n)^2)=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

q.e.d.

Definícia 1.2.2 *Nech $\vec{u}$, $\vec{v}\in\mathbb{V}_n$ sú nenulové vektory. Odchýlkou vektorov $\vec{u},\vec{v}$ rozumieme reálne číslo $\alpha\in\langle 0,\pi\rangle$, pre ktoré platí*

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \qquad (9)$$

Odchýlku vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ budeme označovať $od(\vec{u},\vec{v})$.

Obr. 2: Odchýlka vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$

Poznámka. Veľkosť dutého uhla BAC je rovná odchýlke vektorov $\vec{u}=B-A$, $\vec{v}=C-A$ (viď obr.2).

Príklad 1.2.2 Vypočítajte odchýlku vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak $\vec{u}=(6,-8)$ a $\vec{v}=(12,9)$.

Riešenie. Podľa vety 1.2.1 a vety 1.1.1 platí

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 6.12+(-8).9=0,\\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{6^2+(-8)^2}=10,\\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{12^2+9^2}=15.\end{aligned}$$

Podľa definície 1.2.2 máme

$$\cos(od(\vec{u},\vec{v}))=\frac{0}{150}=0.$$

Z toho

$$od(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}.$$

Definícia 1.2.3 *Hovoríme, že nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú kolmé (ozn. $\vec{u}\perp\vec{v}$), ak ich odchýlka je rovná $\frac{\pi}{2}$.*

Veta 1.2.3 *Nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}_n$ sú kolmé vtedy a len vtedy, ak $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*

Dôkaz. Podľa definície 1.2.2 skalárny súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ je rovný nule vtedy a len vtedy ak

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0.$$

Keďže vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú nenulové, tak podľa vety 1.1.2 je to práve vtedy, keď veľkosti vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú nenulové. Teda $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0$ vtedy a len vtedy, ak

$$\cos(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0.$$

Z vlastností funkcie cosínus máme

$$od(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}.$$

A teda vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú navzájom kolmé.

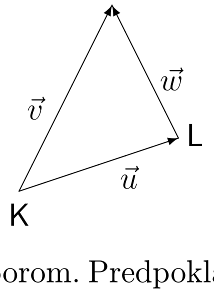
q.e.d.

Z definície skalárneho súčinu a z vlastností funkcie cosínus dostávame
(1) ak $\vec{u}\vec{v} > 0$, tak uhol α je ostrý (viď obr.3),
(2) ak $\vec{u}\vec{v} = 0$, tak uhol α je pravý (viď obr.4),
(3) ak $\vec{u}\vec{v} < 0$, tak uhol α je tupý (viď obr.5).

Obr. 3: $\vec{u}\vec{v} > 0$ Obr. 4: $\vec{u}\vec{v} = 0$ Obr. 5: $\vec{u}\vec{v} < 0$

Príklad 1.2.3 Dokážte, že body $K = [2, -1, 3]$, $L = [1, 1, 1]$, $M = [0, 0, 5]$ sú vrcholy trojuholníka a vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.

Riešenie.



Položme

$$\begin{aligned} \vec{u} &= L - K = (-1, 2, -2), \\ \vec{v} &= M - K = (-2, 1, 2), \\ \vec{w} &= M - L = (-1, -1, 4). \end{aligned}$$

Sporom. Predpokladajme, že body K, L, M ležia na jednej priamke. Potom vektory

$\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú smerové vektory tejto priamky. Teda existuje reálne číslo k také, že vektor $\vec{u}$ je k-násobkom vektora $\vec{v}$. Čiže platí $(-1, 2, -2) = k(-2, 1, 2)$, t.j.

$$\begin{aligned} -1 &= -2k \\ 2 &= k \\ -2 &= -2k. \end{aligned}$$

Táto sústava nemá riešenie, teda vektor $\vec{u}$ nie je násobkom vektora $\vec{v}$. Čiže body K, L, M neležia na jednej priamke, a teda sú vrcholmi trojuholníka.

Pre veľkosť α uhla pri vrchole K máme

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9}, \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9}, \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-1).(-2) + 2.1 + (-2).(2) = 0, \\ \cos\alpha &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = 0. \end{aligned}$$

Z toho $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Podobne pre veľkosť β uhla pri vrchole L dostávame

$$\begin{aligned} \|-\vec{u}\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9}, \\ \|\vec{w}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18}, \\ (-\vec{u}) \cdot \vec{w} &= 1.(-1) + (-2).(-1) + 2.4 = 9, \\ \cos\beta &= \frac{9}{\sqrt{9}\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Z toho $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Podobne pre veľkosť γ uhla pri vrchole M dostávame $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (to vyplýva aj z toho, že v trojuholníku platí $\alpha + \beta + \gamma = \pi$).

Cvičenia

1.2.1 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u}, \vec{v}$, ak

a) $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 3)$;

b) $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (3, 6)$;

c) $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (4, 1, 2)$;

d) $\vec{u} = (2, 1, 4)$, $\vec{v} = (4, 2, 8)$.

1.2.2 Určte skalárny súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak $\vec{u} = B - A$ a $\vec{v} = C - A$, kde $A = [3, 2, 1]$, $B = [1, -3, 0]$, $C = [0, 2, 5]$.

1.2.3 Nájdite reálne číslo x tak, aby platilo $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, ak
a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (4, x, -2)$;
b) $\vec{u} = (3, 4, x)$, $\vec{v} = (-1, -3, 0)$;
c) $\vec{u} = (0, -3, 2)$, $\vec{v} = (x, 4, 5)$.

1.2.4 Vypočítajte odchýlku vektorov $\vec{u}, \vec{v}$, ak
a) $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (2, 1)$;
b) $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

1.2.5 Určte skalárny súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, ak
a) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$;
b) $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 3$, $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{4}\pi$;
c) $\|\vec{a}\| = 1$, $\vec{b} = -3\vec{a}$.

1.2.6 Na osi x nájdite taký bod M, aby vektory $(M - A)$ a $(M - B)$ boli navzájom kolmé, ak
a) $A = [0, 1]$, $B = [5, 6]$;
b) $A = [0, 1, 3]$, $B = [-5, 3, -3]$.

1.2.7 Zistite odchýlku vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ a vektory $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = 3\vec{u}$ sú navzájom kolmé.

1.2.8 Dokážte, že vektory $\vec{c}$ a $\vec{x}$ sú navzájom kolmé, ak $\vec{x} = (\vec{b}\vec{c})\vec{a} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

1.2.9 Zistite, či štvoruholník s vrcholmi $A = [5, 2, 6]$, $B = [6, 4, 4]$, $C = [4, 3, 2]$ a $D = [3, 1, 4]$ je štvorec.

1.2.10 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, ak $\vec{a} = B - A$, $\vec{b} = C - B$, $d(B, C) = 5$, $d(A, C) = 6$, $d(A, B) = 7$.

1.2.11 Body $A = [-3, 2]$, $B = [2, 4]$ sú susedné vrcholy štvorca. Pomocou skalárneho súčinu určte jeho ďalšie dva vrcholy.

1.2.12 Použitím skalárneho súčinu určte veľkosť vektora $\vec{a} = L - A$, ak L je stred strany BC rovnobežníka $ABCD$, $d(A, B) = 5$, $d(B, C) = 6$ a $od(D - A, B - A) = \frac{\pi}{3}$.

Výsledky

1.2.1 a) 5, b) 0, c) 0, d) 42. **1.2.2** 2. **1.2.3** a) 0, b) nemá riešenie, c) pre každé $x \in \mathbb{R}$. **1.2.4** a) $\frac{\pi}{2}$, b) $\frac{\pi}{2}$. **1.2.5** a) 20, b) $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$, c) -3. **1.2.6** a) $[2,0]$, $[3,0]$, b) $[-6,0,0]$, $[1,0,0]$. **1.2.7** $\frac{2\pi}{3}$. **1.2.9** áno **1.2.10** -19. **1.2.11** $C_1 = [4,-1]$, $D_1 = [-1,-3]$, $C_2 = [0,9]$, $D_2 = [-5,7]$. **1.2.12** $\sqrt{19}$.

1.3 Vektorový súčin vektorov

Definícia 1.3.1 *Nech* $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *a* $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *sú vektory patriace* $\mathbb{V}_3$. *Potom vektor*

$$\vec{w} = (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2) \tag{10}$$

nazývame vektorovým súčinom vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Vektorový súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ budeme označovať $\vec{u} \times \vec{v}$.

Príklad 1.3.1 Vypočítajte vektorový súčin vektorov $\vec{u} = (2,2,0)$ a $\vec{v} = (0,5,0)$.

Riešenie. Pre ilustráciu viď obr.6.

Podľa definície 1.3.1 platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2.0 - 5.0, 0.0 - 0.2, 2.5 - 0.2) = (0,0,10).$$

Obr. 6: Vektorový súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$

Lema 1.3.1 *Pre ľubovoľné vektory* $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{V}_3$ *platí*

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

Dôkaz. Využitím vety 1.1.1 a definície 1.3.1 po jednoduchých úpravach dostávame

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - v_3u_1)^2 + (u_1v_2 - v_1u_2)^2 = \\
&= u_2^2v_3^2 - 2u_2v_3v_2u_3 + v_2^2u_3^2 + u_3^2v_1^2 - 2u_3v_1v_3u_1 + v_3^2u_1^2 + \\
&\quad + u_1^2v_2^2 - 2u_1v_2v_1u_2 + v_1^2u_2^2 = \\
&= (u_2^2v_3^2 + v_2^2u_3^2 + u_3^2v_1^2 + v_3^2u_1^2 + u_1^2v_2^2 + v_1^2u_2^2 + u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + \\
&\quad + u_3^2v_3^2) - (u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_2v_3v_2u_3 + 2u_3v_1v_3u_1 + \\
&\quad + 2u_1v_2v_1u_2) = \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2.
\end{aligned}$$

Podľa vety 1.1.1 a vety 1.2.1 máme

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

q.e.d.

Veta 1.3.2 *Vektorový súčin má nasledujúce vlastnosti*
(1) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0,$
(2) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)\ (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0,$
(3) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)\ \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(od(\vec{u}, \vec{v})).$

Dôkaz. (1) Podľa definície 1.3.1 a vety 1.2.1 platí

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= (u_2v_3 - v_2u_3)u_1 + (u_3v_1 - v_3u_1)u_2 + (u_1v_2 - v_1u_2)u_3 \\ &= u_2v_3u_1 - v_2u_3u_1 + u_3v_1u_2 - v_3u_1u_2 + u_1v_2u_3 - v_1u_2u_3 = 0.\end{aligned}$$

(2) Podobne ako v časti (1) dostávame

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} &= (u_2v_3 - v_2u_3)v_1 + (u_3v_1 - v_3u_1)v_2 + (u_1v_2 - v_1u_2)v_3 \\ &= u_2v_3v_1 - v_2u_3v_1 + u_3v_1v_2 - v_3u_1v_2 + u_1v_2v_3 - v_1u_2v_3 = 0.\end{aligned}$$

(3) Podľa lemy 1.3.1 máme

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

Ak označíme $\alpha = od(\vec{u}, \vec{v})$, tak podľa definície 1.2.2 platí

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \cos^2 \alpha.$$

Keďže $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, potom dostávame

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1 - \cos^2 \alpha) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \sin^2 \alpha.$$

Keďže $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, potom $\sin \alpha \geq 0$. Podobne $\|\vec{u}\| \geq 0$ aj $\|\vec{v}\| \geq 0$. Teda predchádzajúca rovnosť implikuje

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \alpha.$$

q.e.d.

Príklad 1.3.2 Vypočítajte $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, ak $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ a $od(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

Riešenie. Podľa vety 1.3.2 máme

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 3.5.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

Dôsledok 1.3.3 *Pre ľubovoľné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3$, vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovný nulovému vektoru vtedy a len vtedy, ak vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé.*

Dôkaz. Ak vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je nulový vektor, tak podľa vety 1.1.2 jeho veľkosť je nula.

Podľa vety 1.3.2 máme

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(od(\vec{u}, \vec{v})).$$

Teda $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ sa rovná nule, ak $\|\vec{u}\| = 0$, alebo ak $\|\vec{v}\| = 0$, alebo ak $\sin(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0$.

Ak $\|\vec{u}\| = 0$, tak $\vec{u} = \vec{o}$ a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé. Podobne ak $\|\vec{v}\| = 0$, tak $\vec{v} = \vec{o}$ a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé. Ak $\sin(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0$, tak buď $od(u, v) = 0$ alebo $od(u, v) = \pi$, čiže jeden vektor je násobkom druhého a vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé.

Ak vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú lineárne závislé, tak buď $\vec{u} = \vec{o}$, alebo $\vec{v} = \vec{o}$, alebo $od(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alebo $od(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Ak $\vec{u} = \vec{o}$, tak podľa vety 1.1.2 platí $\|\vec{u}\| = 0$. Podobne ak $\vec{v} = o$, tak platí $\|\vec{v}\| = 0$. Ak $od(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alebo $od(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, tak v obidvoch prípadoch $sin(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0$.

Keďže podľa vety 1.3.2 platí $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(od(\vec{u}, \vec{v})) = 0$, tak dostávame

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}.$$

q.e.d.

Príklad 1.3.3 Zistite, či vektory $\vec{u} = (4, -6, 2)$ a $\vec{v} = (2, -3, 1)$ sú lineárne závislé.

Riešenie. Podľa definície 1.3.1 máme

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-6 + 6, 4 - 4, -12 + 12) = (0, 0, 0) = \vec{o}.$$

Teda podľa dôsledku 1.3.3 sú vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárne závislé.

Veta 1.3.4 *Pre vektorový súčin vektorov platí*

(1) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)\ \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$,

(2) $(\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)(\forall c \in \mathbb{R})\ (c\vec{u}) \times \vec{v} = c(\vec{u} \times \vec{v})$,

(3) $(\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3)\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$,

(4) $(\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3)\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$.

Dôkaz. (1) Podľa definície 1.3.1 a po jednoduchých úpravach získavame

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2) = \\
&= \Big(-(v_2u_3 - u_2v_3), -(v_3u_1 - u_3v_1), -(v_1u_2 - u_1v_2)\Big) = \\
&= -(v_2u_3 - u_2v_3, v_3u_1 - u_3v_1, v_1u_2 - u_1v_2) = -(\vec{v} \times \vec{u}).
\end{aligned}$$

(2) Keďže $c\vec{u} = (cu_1, cu_2, cu_3)$, potom podľa definície 1.3.1 máme

$$\begin{aligned}
(c\vec{u}) \times \vec{v} &= (cu_2v_3 - v_2cu_3, cu_3v_1 - v_3cu_1, cu_1v_2 - v_1cu_2) = \\
&= c(u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - v_1u_2) = c(\vec{u} \times \vec{v}).
\end{aligned}$$

(3) Podľa definície 1.3.1 platí

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} =$$

$$((u_2 + v_2)w_3 - w_2(u_3 + v_3), (u_3 + v_3)w_1 - w_3(u_1 + v_1), (u_1 + v_1)w_2 - w_1(u_2 + v_2)).$$

Po jednoduchých úpravach máme

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= (u_2w_3 - w_2u_3, u_3w_1 - w_3u_1, u_1w_2 - w_1u_2) + \\
&\quad +(v_2w_3 - w_2u_3, v_3w_1 - w_3v_1, v_1w_2 - w_1v_2) = \\
&= (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w}).
\end{aligned}$$

(4) Podľa predchádzajúcich vlastností (1) a (3) dostávame

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= -((\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}) = -((\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{w} \times \vec{u})) = \\
&= -(\vec{v} \times \vec{u}) - (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 1.3.4 Dokážte, že existuje kocka $ABCDEFGH$ s vrcholmi $A = [1, -1, 3]$, $B = [3, 0, 5]$, $D = [-1, 1, 4]$ a určte súradnice ostatných vrcholov.

Riešenie. Vektory $B - A$ a $D - A$ musia byť navzájom kolmé a nenulové (viď

Obr. 7:

obr. 7). Vzdialenosť bodov A, B sa musí rovnať vzdialenosti bodov A, D.

Zrejme $B - A = (2, 1, 2)$ a $D - A = (-2, 2, 1)$. Podľa vety 1.2.1 máme

$$(B - A)(D - A) = 2.(-2) + 1.2 + 2.1 = 0.$$

Keďže skalárny súčin vektorov $B - A$, $D - A$ je nulový, potom podľa vety 1.2.3 vektory $B - A$ a $D - A$ sú navzájom kolmé.

Pre vzdialenosť dvoch bodov A, B resp. A, D platí

$$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (0+1)^2 + (5-3)^2} = 3,$$

$$d(A,D) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2 + (4-3)^2} = 3.$$

Z toho $d(A,B) = d(A,D)$.

Podľa definície 1.3.1 a vety 1.3.2 vektor kolmý na vektory $B - A$ a $D - A$ má súradnice

$$(B-A) \times (D-A) = (-3,-6,6),$$

resp.

$$(D-A) \times (B-A) = (3,6,-6).$$

I. Položme $\vec{w} = (B-A) \times (D-A) = (-3,-6,6)$.
Vektor $\vec{q} = (-1,-2,2)$ je $\frac{1}{3}$ násobkom vektora $\vec{w}$ a jeho veľkosť je 3. Čiže vektor $\vec{q}$ je rovný vektoru $E - A$. Z toho bod E má súradnice

$$[a_1 + q_1, a_2 + q_2, a_3 + q_3] = [0,-3,5].$$

Označme S priesečník uhlopriečok steny $ABCD$. Uhlopriečky štvorca sa rozpoľujú, čiže

$$S = \left[\frac{b_1+d_1}{2}, \frac{b_2+d_2}{2}, \frac{b_3+d_3}{2}\right] = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

Keďže S je aj stred strany AC, potom bod C má súradnice

$$[2s_1 - a_1, 2s_2 - a_2, 2s_3 - a_3] = [1,2,6].$$

Keďže $F - B = G - C = H - D = \vec{q}$, potom dostávame

$$\begin{aligned} F &= [2,-2,7], \\ G &= [0,0,8], \\ H &= [-2,-1,6]. \end{aligned}$$

II. Položme $\vec{w} = (D-A) \times (B-A) = (3,6,-6)$. Podobne ako v časti I. platí $S = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$ a $C = [1,2,6]$. Vektor $\vec{u} = (1,2,-2)$ je $\frac{1}{3}$ násobkom vektora $\vec{w}$ a jeho veľkosť je 3. Čiže vektor $\vec{u}$ je rovný vektoru $E' - A$. Z toho bod E' má súradnice

$$[a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3] = [2,1,1].$$

Keďže $F' - B = G' - C = H' - D = \vec{u}$, tak dostávame

$$\begin{aligned} F' &= [4,2,3], \\ G' &= [2,4,4], \\ H' &= [0,3,2]. \end{aligned}$$

Cvičenia

1.3.1 Vypočítajte vektorový súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak
a) $\vec{u} = (1, 3, 2)$, $\vec{v} = (-1, -2, 0)$;
b) $\vec{u} = (2, 6, -4)$, $\vec{v} = (-1, -3, 2)$;
c) $\vec{u} = (4, 3, -2)$, $\vec{v} = (-1, -5, 2)$;
d) $\vec{u} = (3, 4, 0)$, $\vec{v} = (-3, 1, 0)$;
e) $\vec{u} = (5, 7, 3)$, $\vec{v} = (-3, -7, -5)$;
f) $\vec{u} = (2, 2, -2)$, $\vec{v} = (4, 3, -1)$.

1.3.2 Nájdite jednotkový vektor, ktorý je kolmý na vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, ak
a) $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 4)$;
b) $\vec{u} = (2, -3, 1)$, $\vec{v} = (5, 0, -5)$;
c) $\vec{u} = (4, -1, -2)$, $\vec{v} = (-1, 2, -3)$.

1.3.3 Vypočítajte $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, ak
a) $\vec{a} = (2, 7, 4)$, $\vec{b} = (3, 4, 5)$, $\vec{c} = (6, 0, 3)$;
b) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, 3, 1)$.

1.3.4 Vypočítajte $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, ak
a) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$, $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$;
b) $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 8$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24$;
c) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$;
d) $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3\sqrt{3}$.

1.3.5 Vypočítajte $\|(3\vec{a} + \vec{b}) \times (a - 3\vec{b})\|$, ak
a) $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$;
b) $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3\sqrt{3}$.

1.3.6 Pre kolmé vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$. Vypočítajte $\|(\vec{a} + 3b) \times (2\vec{a} - 5\vec{b})\|$.

1.3.7 Napíšte parametrické vyjadrenie priamky $p : 2x - y + z - 9 = 0, x + y - z = 0$.

1.3.8 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny α:

$$\begin{aligned} x &= 1 + s + 2t \\ y &= -4 - t \\ z &= -3 + s - t. \end{aligned}$$

1.3.9 Napíšte parametrické vyjadrenie priamky p prechádzajúcej bodom $D = [3, 0, 0]$ rovnobežne s priesečnicou rovín α a β, ak rovina α prechádza bodmi $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, -1, 0]$, $C = [1, 0, 1]$ a $\beta : x + 2y - z = 0$ (úlohu riešte aj využitím vektorového súčinu).

Výsledky

1.3.1 a) $(4, -2, 1)$, b) $(0, 0, 0)$, c) $(-4, -6, -17)$, d) $(0, 0, 15)$, e) $(-14, 16, -14)$, f) $(4, -6, -2)$. **1.3.2** a) $(\frac{11\sqrt{131}}{131}, -\frac{\sqrt{131}}{131}, \frac{3\sqrt{131}}{131})$, $(\frac{-11\sqrt{131}}{131}, \frac{\sqrt{131}}{131}, -\frac{3\sqrt{131}}{131})$,
b) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, c) $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$, $(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})$.
1.3.3 a) $(6, 21, -12)$, $(84, 96, -42)$, b) $(-10, 11, -3)$, $(-15, -9, 7)$. **1.3.4** a) $3\sqrt{3}$, b) 32, c) $\frac{15}{2}$, d) 3. **1.3.5** a) 60, b) 24. **1.3.6** 66. **1.3.7** $x = 3$, $y = 2 + 3t$, $z = 5 + 3t$. **1.3.8** $x + 3y - z + 8 = 0$. **1.3.9** $x = 3 - t$, $y = -t$, $z = -3t$.

1.4 Zmiešaný súčin vektorov

Definícia 1.4.1 *Nech $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{V}_3$. Reálne číslo*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{11}$$

nazývame zmiešaný súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Zmiešaný súčin budeme označovať $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Príklad 1.4.1 Vypočítajte zmiešaný súčin vektorov $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (3, 3, -2)$ a $\vec{w} = (4, 2, 1)$.

Riešenie. Podľa definície vektorového súčinu platí

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-11, 13, 3).$$

A podľa definície 1.4.1 a vety 1.2.1 dostávame

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (-11).4 + 13.2 + 3.1 = -15.$$

Z definície zmiešaného súčinu a z vlastností vektorového súčinu sa dá ukázať
(1) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ je kladný, ak vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoria pravotočivú sústavu (viď obr.8),
(2) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ je záporný, ak vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoria ľavotočivú sústavu (viď obr.9),
(3) $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ je nulový, ak vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sú komplanárne t. j. smerové vektory jednej roviny (viď obr.10).

Obr. 8: Obr. 9: Obr. 10:

Veta 1.4.1 *Pre zmiešaný súčin vektorov platí*
(1) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3)\ \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle,$
(2) $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}_3)\ \langle \vec{a}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \rangle,$
(3) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3)(\forall r \in \mathbb{R})\ \langle r\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, r\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, r\vec{c} \rangle = r\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle,$
(4) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_3)\ \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \rangle.$

Dôkaz (1) Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Podľa definície 1.4.1, definície 1.3.1 a vety 1.2.1 platí

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \\ &= (a_2b_3 - b_2a_3)c_1 + (a_3b_1 - b_3a_1)c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3 = \\ &= (b_2c_3 - c_2b_3)a_1 + (b_3c_1 - c_3b_1)a_2 + (b_1c_2 - c_1b_2)a_3 = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle. \end{aligned}$$

Podobne podľa vety 1.3.4 dostávame

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (-\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle.$$

(2) Podľa vlastnosti (1) máme

$$\langle \vec{a}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \rangle,$$

a

$$\langle \vec{a}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \rangle.$$

(3) Podľa definície vety 1.2.1 a 1.2.2 máme

$$\langle r\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (r\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (r(\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{c} = r((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = r\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

Rovnakým spôsobom dokážeme $\langle \vec{a}, r\vec{b}, \vec{c} \rangle = r\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ aj $\langle \vec{a}, \vec{b}, r\vec{c} \rangle = r\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.
(4) Podľa definície 1.4.1 a vety 1.2.2 dostávame

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} + \vec{v} \rangle &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{u} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{v} = \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 1.4.2 Vypočítajte $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a} \rangle$.

Riešenie. Z vlastností vektorového a zmiešaného súčinu dostávame

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a} \rangle = \\
&= \langle \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{b} \rangle = \\
&= \langle \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{b} \rangle + \\
&\quad + \langle \vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{b} \rangle = \\
&= \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}, \vec{a} \rangle + + \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{a} \rangle + \\
&\quad + \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}, \vec{b} \rangle + + \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \\
&= \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \\
&= \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \\
&= 2\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle.
\end{aligned}$$

Cvičenia

1.4.1 Vypočítajte zmiešaný súčin $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$, ak
a) $\vec{a} = (1, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, 6)$, $\vec{c} = (8, 9, 7)$;
b) $\vec{a} = (13, 12, 11)$, $\vec{b} = (24, 23, 22)$, $\vec{c} = (35, 34, 33)$;
c) $\vec{a} = (2, 4, 7)$, $\vec{b} = (1, 12, 5)$, $\vec{c} = (11, 4, 7)$;
d) $\vec{a} = (2, 2, 2)$, $\vec{b} = (5, 9, 3)$, $\vec{c} = (1, 2, 17)$;
e) $\vec{a} = (12, 15, 5)$, $\vec{b} = (7, 4, 2)$, $\vec{c} = (3, 3, 1)$;
f) $\vec{a} = (7, 8, 9)$, $\vec{b} = (4, 4, 6)$, $\vec{c} = (18, 19, 13)$.

1.4.2 Zistite, či vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoria pravotočivú sústavu, ak
a) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$, $\vec{w} = (8, 6, 4)$;
b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$, $\vec{w} = (2, 3, 1)$;
c) $\vec{u} = (1, 3, 5)$, $\vec{v} = (2, 4, 6)$, $\vec{w} = (8, 9, 7)$.

1.4.3 Zisitite, či vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoria ľavotočivú sústavu, ak
a) $\vec{u} = (4, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, 2, 3)$, $\vec{w} = (1, 2, 5)$;
b) $\vec{u} = (3, 4, 7)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (5, 2, 1)$;
c) $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $\vec{v} = (8, 2, 1)$, $\vec{w} = (4, 3, 3)$.

1.4.4 Zistite, či vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sú komplanárne, ak
a) $\vec{u} = (7, 2, 2)$, $\vec{v} = (8, 2, 1)$, $\vec{w} = (5, 3, 4)$;
b) $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (1, 1, 3)$, $\vec{w} = (4, 6, 10)$;
c) $\vec{u} = (13, 12, 11)$, $\vec{v} = (24, 23, 22)$, $\vec{w} = (35, 34, 33)$.

1.4.5 Zistite, či vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sú smerové vektory jednej roviny, ak
a) $\vec{u} = (3, 5, -2)$, $\vec{v} = (2, -2, -1)$, $\vec{w} = (-4, 4, 2)$;
b) $\vec{u} = (4, 2, 8)$, $\vec{v} = (5, 6, 5)$, $\vec{w} = (2, 1, 4)$;
c) $\vec{u} = (5, 10, 5)$, $\vec{v} = (-1, -2, -1)$, $\vec{w} = (3, -7, 2)$.

Výsledky

1.4.1 a) 2, b) 0, c) -576, d) 132, e) 6, f) 50. **1.4.2** a) nie, b) áno, c) áno. **1.4.3** a) áno, b) áno, c) nie. **1.4.4** a) nie, b) áno, c) áno. **1.4.5** a) áno, b) áno, c) áno.

2 Odchýlka

2.1 Odchýlka dvoch priamok

Definícia 2.1.1 *Odchýlkou priamok p_1 a p_2 priestoru $\mathbb{E}_n$ rozumieme reálne číslo $od(p_1, p_2)$, pre ktoré platí*

$$\begin{aligned} od(p_1, p_2) &= min\{od(\vec{s_1}, \vec{s_2});\ \vec{s_1} \text{ je nenulový smerový vektor } p_1 \\ &\qquad \text{a } \vec{s_2} \text{ je nenulový smerový vektor } p_2\} \end{aligned}$$

Veta 2.1.1 *Pre odchýlku priamok $p_1 = p(A, \vec{u})$ a $p_2 = p(B, \vec{v})$ platí*

$$\cos(od(p_1, p_2)) = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \tag{12}$$

Dôkaz.

Obr. 11:

Nech $\vec{s_1}$ je smerový vektor priamky p_1 a $\vec{s_2}$ je smerový vektor priamky p_2 (viď obr.11). Potom existujú nenulové reálne čísla t, r, také že $\vec{s_1} = t\vec{u}$, $\vec{s_2} = r\vec{v}$.

Označme φ odchýlku vektorov $\vec{s_1}$ a $\vec{s_2}$.

Podľa definície 1.2.2 a vety 1.2.2 získavame

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\vec{s_1}\vec{s_2}}{\|\vec{s_1}\|\|\vec{s_2}\|} = \frac{(t\vec{u})\,(r\vec{v})}{\|t\vec{u}\|\|r\vec{v}\|} = \frac{tr}{|t||r|} \cdot \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{tr}{|tr|} \cdot \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \end{aligned}$$

Keďže $\frac{tr}{|tr|} \in \{1, -1\}$, potom $\cos\varphi \in \left\{ \frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, -\frac{\vec{u}\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \right\}$.

Podľa definície 2.1.1 odchýlka priamok p a q je rovná minimálnej odchýlke smerových vektorov priamok p, q. Z toho, že funkcia cosínus je na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ klesajúca vyplýva, že odchýlka vektorov $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ bude minimálna, ak hodnoty funkcie cosínus budú kladné. Z toho teda dostávame

$$\cos(od(p_1, p_2)) = \frac{|\vec{u}\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

q.e.d.

Poznámka. V ďalších kapitolách sa budeme často zaoberať kolmými priamkami, teda takými, ktorých odchýlka je $\frac{\pi}{2}$. To nastane podľa vety 2.1.1 práve vtedy, ak $\vec{u}\vec{v} = 0$.

Príklad 2.1.1 Vypočítajte odchýlku priamok $p: x = 1 + t, y = 5 + 3t$ a $q: x = 13 + s, y = 11 - 2s$.

Riešenie. Smerové vektory priamok p a q sú $\vec{u} = (1, 3)$ a $\vec{v} = (1, -2)$. Podľa vety 2.1.1 získavame

$$\cos(od(p,q)) = \frac{|1.1 + 3.(-2)|}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z toho

$$od(p,q) = \frac{\pi}{4}.$$

Príklad 2.1.2 Bod $M = [4, 0]$ leží na priamke, ktorá obsahuje základňu rovnoramenného trojuholníka ABC. Ramená tohto trojuholníka ležia na priamkách $r: x - y + 8 = 0$ a $q: x - 2y - 12 = 0$. Určte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží základňa trojuholníka ABC.

Riešenie. Smerové vektory priamok r a q sú $\vec{u} = (1, 1)$ a $\vec{v} = (2, 1)$.

Obr. 12:

Označme p priamku, ktorá obsahuje základňu trojuholníka ABC a $\vec{w} = (w_1, w_2)$ jej smerový vektor (viď obr. 12).

Podľa vety 2.1.1 máme

$$\begin{aligned}
\cos(od(p,r)) &= \frac{|w_1.1 + w_2.1|}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}\sqrt{1^2+1^2}} \\
\cos(od(p,q)) &= \frac{|w_1.2 + w_2.1|}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}\sqrt{2^2+1^2}}.
\end{aligned}$$

V rovnoramennom trojuholníku odchýlky ramien trojuholníka a základne sú rovnaké. Čiže platí

$$od(p,r) = od(p,q).$$

Teda máme

$$\begin{aligned}
\frac{|w_1 + w_2|}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}\sqrt{2}} &= \frac{|2w_1 + w_2|}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}\sqrt{5}} \\
\sqrt{5}|w_1 + w_2| &= \sqrt{2}|2w_1 + w_2|.
\end{aligned}$$

Stačí nám uvažovať dva prípady a to buď I. výrazy $w_1 + w_2$ a $2w_1 + w_2$ majú rovnaké znamienka, alebo II. výrazy $w_1 + w_2$ a $2w_1 + w_2$ majú opačné znamienka.

I.

$$\begin{aligned}\sqrt{5}(w_1+w_2) &= \sqrt{2}(2w_1+w_2)\\ w_1 &= \frac{\sqrt{2}w_2-\sqrt{5}w_2}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}+1}{3}\cdot w_2.\end{aligned}$$

Teda normálový vektor priamky p je napr. $\vec{n}=(-3,\sqrt{10}+1)$. Bod $M\in p$, teda všeobecná rovnica priamky p má tvar

$$-3x+(\sqrt{10}+1)y+12=0.$$

II.

$$\begin{aligned}\sqrt{5}(w_1+w_2) &= \sqrt{2}(-2w_1-w_2)\\ w_1 &= \frac{-\sqrt{2}w_2-\sqrt{5}w_2}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{10}}{3}\cdot w_2.\end{aligned}$$

Teda normálový vektor priamky p je napr. $\vec{n}=(-3,1-\sqrt{10})$. Bod $M\in p$, teda všeobecná rovnica priamky p má tvar

$$-3x+(1-\sqrt{10})y+12=0.$$

Cvičenia

2.1.1 Vypočítajte odchýlku priamok p a q, ak
a) $p: x=2-3t, y=-1, z=1+t$, $q: x=3+2s, y=4, z=7+s$;
b) $p: x=1+t, y=-1+t, z=3$, $q: x=5+2t, y=t, z=-1+t$;
c) $p: 3x+5y+1=0$, $q: 2x-8y+3=0$;
d) $p: 2x-y-z-1=0, 2x+y+z-2=0$, $q: x=3+t, y=1+t, z=-2$;
e) $p: 2x+2y+z-7=0, x-2y+2z+75=0$, $q: 9x-2y+z-16=0, 3x-y-z+3=0$.

2.1.2 Určte súradnice vrchola C trojuholníka ABC, ak $A=[-6,2]$, $B=[2,-2]$ a priesečník jeho výšok je $H=[1,2]$.

2.1.3 Vypočítajte odchýlku priamky $p: x=-1+t, y=4, z=2-\sqrt{3}t$ a osi z.

2.1.4 Napíšte rovnicu priamky r, ktorá prechádza bodom $M=[3,-2]$, ak odchýlka priamky r a priamky $p: \sqrt{3}x-y+3=0$ je $\frac{\pi}{3}$.

2.1.5 Určte odchýlku priamky $p:\ x=2z-1,\ y=-2z+1$ a priamky m, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy a bodom $A=[1,-1,-1]$.

2.1.6 Vypočítajte súradnice vrcholov B, C trojuholníka ABC, ak $A = [1,2]$, rovnica výšky prechádzajúca vrcholom A je $3x + y - 5 = 0$, rovnica ťažnice prechádzajúca vrcholom B je $3x - 4y + 10 = 0$ a veľkosť uhla pri vrchole C je $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

2.1.7 Zistite, či štvoruholník s vrcholmi $A = [5,2,6]$, $B = [6,4,4]$, $C = [4,3,2]$, $D = [3,1,4]$ je štvorec.

2.1.8 Vypočítajte odchýlku protiľahlých hrán pravidelného štvorstena.

2.1.9 Napíšte rovnice strán štvorca $ABCD$, ak $A = [1,1]$ a jedna uhlopriečka má rovnicu $t : 7x - y - 31 = 0$.

2.1.10 Svetelný lúč vychádza z bodu $K = [5,4]$, dopadá na os x pod uhlom $\frac{\pi}{3}$, odráža sa od nej a potom dopadá na os y, od nej sa tiež odráža. Určte rovnice priamok, po ktorých prechádza svetelný lúč a súradnice bodov, v ktorých sa lúč odráža od jednotlivých osí.

2.1.11 Vypočítajte súradnice vrcholov štvorstena $ABCD$, ak hrana AC leží na priamke $x = 3 + 2t, y = -1 - t, z = -5 - 2t$, hrana BD na priamke $x = 4, y = s, z = -2 + s$, priamka p prechádza bodmi C, D a bodom $M = [-8,-12,-18]$, vzdialenosť bodov A, B je $\sqrt{50}$ a odchýlka priamky p a q obsahujúcej hranu AB je $\frac{\pi}{3}$.

Výsledky

2.1.1 a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{\pi}{3}$, e) $\frac{\pi}{2}$. **2.1.2** $C = [2,4]$. **2.1.3** $\frac{\pi}{6}$. **2.1.4** $p : y + 2 = 0$, $p : \sqrt{3}x + y + 2 - 3\sqrt{3} = 0$. **2.1.5** $cos\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. **2.1.6** $B = [2,4]$, $C = [-1,3]$. **2.1.7** áno. **2.1.8** $\frac{\pi}{2}$. **2.1.9** $4x + 3y - 7 = 0$, $-3x + 4y - 1 = 0$, $-3x + 4y + 24 = 0$, $4x + 3y - 32 = 0$. **2.1.10** $X = [-4\sqrt{3}+5, 0]$, $Y = [0, 12-5\sqrt{3}]$, $x\sqrt{3}-3y+12-5\sqrt{3} = 0$, $x\sqrt{3} + y - 12 + 5\sqrt{3} = 0$, $x\sqrt{3} - 3y + 36 - 15\sqrt{3} = 0$. **2.1.11** $A = [-3,2,1]$, $B = [4,3,1]$, $C = [1,0,-3]$, $D = [4,4,2]$, $A = [\frac{129}{17}, \frac{-56}{17}, \frac{-163}{17}]$, $B = [4, \frac{-29}{17}, \frac{-63}{17}]$, $C = [1,0,-3]$, $D = [4,4,2]$.

2.2 Odchýlka priamky a roviny

Nech ρ je rovina majúca normálový vektor $\vec{n}$ a nech A je ľubovoľný bod priestoru $\mathbb{E}_3$. Kolmý priemet bodu A do roviny ρ je priesečník priamky $p = p(A, \vec{n})$ a roviny ρ.

Kolmý priemet množiny M do roviny ρ pozostáva z kolmých priemetov všetkých bodov množiny M do roviny ρ.

Ľahko vidieť, že kolmý priemet priamky do roviny je buď bod (ak smerový vektor priamky je normálový vektor roviny), alebo priamka (v ostatných prípadoch).

Definícia 2.2.1 *Nech p je priamka, ρ je rovina a q je kolmý priemet priamky p do roviny ρ. Odchýlkou priamky p a roviny ρ rozumieme reálne číslo $od(p, \rho)$ pre ktoré platí*

a) $od(p, \rho) = \frac{\pi}{2}$, ak smerový vektor priamky p je normálový vektor roviny ρ, alebo

b) $od(p, \rho) = od(p, q)$, v ostatných prípadoch.

Veta 2.2.1 *Nech $\vec{u}$ je smerový vektor priamky p a $\vec{n}$ je normálový vektor roviny ρ v priestore $\mathbb{E}_3$. Potom pre odchýlku priamky p a roviny ρ platí*

$$sin(od(p, \rho)) = \frac{|\vec{u}\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}.$$

Dôkaz. Ak vektory $\vec{u}$ a $\vec{n}$ sú lineárne závislé, tak smerový vektor priamky p

Obr. 13:

je normálový vektor roviny ρ a z toho podľa definície 2.2.1 odchýlka priamky p a roviny ρ je rovná $\frac{\pi}{2}$.

Podľa definície 1.2.2 platí

$$\vec{u}\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(od(\vec{u}, \vec{v})).$$

Z toho máme

$$|\vec{u}\vec{v}| = |\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(od(\vec{u}, \vec{v}))|.$$

Keďže vektory $\vec{u}$ a $\vec{n}$ sú lineárne závisle, potom ich odchýlka je buď rovná 0, alebo π. Keďže $\cos 0 = 1$ a $\cos \pi = -1$, potom dostávame

$$|\vec{u}\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Keďže $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, potom máme

$$\frac{|\vec{u}\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = 1 = \sin \frac{\pi}{2} = od(p, \rho).$$

Nech A je ľubovoľný bod priamky p. Nech priamka q je kolmý priemet priamky p do roviny ρ a r je priamka určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{n}$. Nech $\psi = od(r, p)$ a $\varphi = od(p, q)$ (viď obr. 13).

Vektory $\vec{u}$ a $\vec{n}$ sú lineárne nezávislé, teda priamky p, q a r ležia v jednej rovine. Pretože $q \in \rho$, priamka r je kolmá na priamku q. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je π, a uhol pri vrchole D je $\frac{\pi}{2}$, potom $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$. Čiže dostávame

$$\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi) = \cos\psi.$$

Pretože $\vec{n}$ je smerový vektor priamky r a $\vec{u}$ je smerový vektor priamky p, pre odchýlku $\psi = od(r, p)$ podľa vety 2.1.1 platí

$$\cos\psi = \frac{|\vec{u}\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{n}\|}.$$

Z toho a predchádzajúcej rovnosti teda máme

$$\sin(od(p, \rho)) = \frac{|\vec{u}\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}.$$

q.e.d.

Príklad 2.2.1 Vypočítajte odchýlku priamky $p : x = 1+11t, y = 2-7t, z = 5-8t$ a roviny $\rho : 7x - 8y + 2z - 10 = 0$.

Riešenie. Smerový vektor priamky p je $(11, -7, -8)$ a normálový vektor roviny ρ je $(7, -8, 2)$. Podľa vety 2.2.1 máme

$$\sin(od(p, \rho)) = \frac{|11.7 + (-7).(-8) + (-8).2|}{\sqrt{11^2 + (-7)^2 + (-8)^2}\sqrt{7^2 + (-8)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z toho $od(p, \rho) = \frac{\pi}{4}$.

Príklad 2.2.2 V štvorbokom ihlane $ABCDV$ vypočítajte odchýlky bočných hrán a podstavy ihlana, ak $A = [-1, -2, 7]$, $B = [2, -5, 7]$, $C = [3, -4, 3]$, $D = [0, -1, 3]$ a vrchol $V = [3, -1, 6]$.

Riešenie. Keďže $d(A, B) = d(B, C) = d(C, D) = d(D, A) = \sqrt{18}$ a $od(A - B, C - B) = od(B - C, D - C) = od(C - D, A - D) = od(A - D, C - D) = \frac{\pi}{2}$, potom podstavou ihlana $ABCDV$ je štvorec. Z toho, že $d(V, A) = d(V, B) = d(V, C) = d(V, D) = \sqrt{18}$ vyplýva, že ihlan $ABCDV$ je pravidelný. Teda odchýlky bočných hrán a podstavy budú rovnaké.

Vektory $B - A = (3, -3, 0)$ a $D - A = (1, 1, -4)$ sú smerové vektory roviny α obsahujúcej podstavu ihlana. Jej normálový vektor $\vec{n}$ je vektorovým súčinom vektorov $B - A$ a $D - A$. Teda dostávame

$$\vec{n} = (3, -3, 0) \times (1, 1, -4) = (12, 12, 6).$$

Podobne $V - A = (4, 1, -1)$ je smerový vektor priamky p obsahujúcej bočnú hranu ihlana.

Podľa vety 2.2.1 platí

$$sin(od(p, \alpha)) = \frac{(4, 1, -1) \cdot (12, 12, 6)}{\|(4, 1, -1)\| \|(12, 12, 6)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z toho $od(p, \alpha) = \frac{\pi}{4}$.

Cvičenia

2.2.1 Vypočítajte odchýlku priamky p a roviny α , ak

a) $p : x = 1 + 2t, y = -3t, z = -3 - t$, $\alpha : x + 2y - 4z + 11 = 0$;

b) $p : x = 3 + 2t, y = 6 - t, z = -2 - t$, $\alpha : 2x - 4y + 2z - 9 = 0$;

c) $p : y = 3x - 1, 2z + 3x = 2$, $\alpha : 2x + y + z + 4 = 0$;

d) $p : x + 4y - 2z + 7 = 0, 3x + 7y - 2z = 0$, $\alpha : 3x + y - z + 1 = 0$;

e) $p = p(A, B - A)$, $A = [8, -6, 2]$, $B = [12, -9, 1]$ a $\alpha : 3x - 5y - z - 2 = 0$.

2.2.2 Určte odchýlku priamky $p : x = 4 + t$, $y = 7 - 8t$, $z = -11 + 3t$ a roviny ρ, prechádzajúcej bodmi $A = [2, 2, 1]$, $B = [0, 1, -1]$, $C = [1, 3, 4]$.

2.2.3 Vypočítajte odchýlky rovín $\alpha : 2x - 2y + z - 6 = 0$ a súradnicových osí x, y, z.

2.2.4 Určte odchýlky priamky $p : x = -1 + t, y = 4, z = 2 - \sqrt{3}t$ a všetkých súradnicových osí.

2.2.5 Vypočítajte najväčšiu možnú odchýlku hrany a steny štvorstena $ABCD$, ak $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$. (Odchýlkou hrany a steny sa rozumie odchýlka priamky v ktorej leží hrana a roviny v ktorej leží stena).

Výsledky

2.2.1 a) 0, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$, d) $sin(od(p, \alpha)) = \frac{19\sqrt{7}}{77}$, e) $sin(od(p, \alpha)) = \frac{2\sqrt{770}}{55}$. **2.2.2** $\frac{\pi}{2}$. **2.2.3** $sin(od(\rho, o_x)) = \frac{2}{3}$, $sin(od(\rho, o_y)) = \frac{2}{3}$, $sin(od(\rho, o_z)) = \frac{1}{3}$. **2.2.4** $od(p, Oxy) = \frac{\pi}{3}$, $od(p, Oxz) = 0$, $od(p, Oyz) = \frac{\pi}{4}$. **2.2.5** $\frac{\pi}{2}$.

2.3 Odchýlka dvoch rovín

Definícia 2.3.1 *Odchýlkou rovín α a β v priestore $\mathbb{E}_3$ rozumieme odchýlku priamok a a b, kde a je ľubovoľná priamka kolmá na rovinu α a b je ľubovoľná priamka kolmá na β.*

Odchýlku rovín α a β budeme označovať $od(\alpha, \beta)$.

Veta 2.3.1 *Nech $\vec{n}$ je normálový vektor roviny α a $\vec{m}$ je normálový vektor roviny β. Potom pre odchýlku rovín α a β platí*

$$\cos(od(\alpha, \beta)) = \frac{|\vec{n}\vec{m}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{m}\|}.$$

Dôkaz. Ak priamka a je kolmá na rovinu α a priamka b je kolmá na rovinu β,

Obr. 14:

tak vektor $\vec{n}$ je smerový vektor priamky a a vektor $\vec{m}$ je smerový vektor priamky b (viď obr. 14).

Podľa definície 2.3.1 odchýlka rovín α a β je rovná odchýlke priamok a a b. Teda podľa vety 2.1.1 máme

$$\cos(od(\alpha, \beta)) = \cos(od(a, b)) = \frac{|\vec{n}\vec{m}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{m}\|}.$$

q.e.d.

Príklad 2.3.1 Vypočítajte odchýlku rovín $\alpha : x - y + z\sqrt{2} + 2 = 0$ a $\beta : x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0$.

Riešenie. Vektor $\vec{n} = (1, -1, \sqrt{2})$ je normálový vektor roviny α a $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2})$ je normálový vektor roviny β.

Podľa vety 2.3.1 dostávame

$$cos(od(\alpha, \beta)) = \frac{|1.1 + (-1).1 + \sqrt{2}\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Z toho $od(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{3}$.

Príklad 2.3.2 Napíšte rovnicu roviny α, v ktorej leží priamka $p : 5x + y + z = 0, y - z + 4 = 0$, ak odchýlka roviny α a roviny $\beta : 4x - y + 8z - 12 = 0$ je $\frac{\pi}{4}$.

Riešenie. Nie je ťažké dokázať, že ak rovina α obsahuje priamku p, tak existujú reálne čísla s, t, $(s,t) \neq (0,0)$ také, že rovina α má rovnicu

$$t(5x + y + z) + s(y - z + 4) = 0,$$

po úprave máme

$$5tx + (t + s)y + (t - s)z + 4s = 0.$$

Keďže odchýlka roviny α a roviny β je $\frac{\pi}{4}$ a $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, potom podľa vety 2.3.1 dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{|4.5t + (-1)(t+s) + 8(t-s)|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 8^2}\sqrt{(5t)^2 + (t+s)^2 + (t-s)^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{|27t - 9s|}{\sqrt{81}\sqrt{27t^2 + 2s^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2|3t - s| &= \sqrt{2}\sqrt{27t^2 + 2s^2} \\
t(3t + 4s) &= 0.
\end{aligned}$$

Z toho $t = 0$, alebo $t = -\frac{4}{3}s$.

Dostávame dve riešenia úlohy

I. ak $t = 0$, tak $s(y - z + 4) = 0$, a teda

$$\alpha : y - z + 4 = 0.$$

II. ak $t = -\frac{4}{3}s$, tak $-\frac{4}{3}s(5x + y + z) + s(y - z + 4) = 0$, a teda

$$\alpha : 20x + y + 7z - 12 = 0.$$

Cvičenia

2.3.1 Vypočítajte odchýlku rovín α a β, ak

a) $\alpha : 4x - 5y + 3z + 7 = 0$, $\beta : x - 4y - z = 10$;

b) $\alpha : 2x - 6y + 10z = 17$, $\beta : 3x - 9y + 15z = 32$;

c) $\alpha : x = 1 + s + 2t, y = -4 + t, z = -3 + s - t$, $\beta : 2x - 5y - 13z + 10 = 0$;

d) $\alpha : x = 10 + s - 2t, y = -1 + 3s + t, z = 1 + s - 2t$,

$\beta : x = 7 + 4s + t, y = -5 + 3s - t, z = 3 - 3s + t$.

2.3.2 Nech α a β sú roviny prechádzajúce bodom $M = [-5, 16, 12]$. V rovine α leží os x a v rovine β leží os y. Vypočítajte odchýlku týchto dvoch rovín.

2.3.3 Osou z veďte rovinu α takú, že odchýlka roviny α a roviny $\rho : 2x + y - z\sqrt{5} = 0$ je $\frac{\pi}{3}$.

2.3.4 Napíšte rovnicu roviny α, v ktorej leží priesečnica rovín $5x + y + z = 0, y - z + 4 = 0$, ak odchýlka roviny α a roviny $\beta : 4x - y + 8z - 12 = 0$ je $\frac{\pi}{4}$.

2.3.5 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá prechádza bodom $A = [3, 2, -2]$ kolmo na rovinu $\beta : 5x-2y+5z-11 = 0$ a odchýlka rovina α a roviny $\gamma : x-4y-8z+1 = 0$ je $\frac{\pi}{4}$.

2.3.6 Body $D = [0, 0, 0]$, $A = [4, 0, 0]$, $C = [0, 3, 0]$, $H = [0, 0, 5]$ sú vrcholy kvádra $ABCDEFGH$. Určte odchýlku roviny obsahujúcej body B, E, G a roviny obsahujúcej body A, B, C.

2.3.7 Vypočítajte najväčšiu možnú odchýlku dvoch stien štvorstena $ABCD$, ak $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$ (Pod odchýlkou dvoch stien sa rozumie odchýlka dvoch rovín, ktoré dané steny obsahujú).

Výsledky

2.3.1 a) $cos(od(\alpha, \beta)) = \frac{7}{10}$, b) 0, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{3}$. **2.3.2** $\cos od(\alpha, \beta) = \frac{4}{13}$. **2.3.3** $\alpha : 3x = y$, $\alpha : x + 3y = 0$. **2.3.4** $\alpha : y - z + 4 = 0$, $\alpha : 20x + y + 7z - 12 = 0$. **2.3.5** $\alpha : x - z - 5 = 0$, $\alpha : x + 20y + 7z - 29 = 0$. **2.3.6** $cos(od(\alpha, \beta)) = \frac{12\sqrt{769}}{769}$. **2.3.7** $\frac{\pi}{2}$.

3 Vzdialenosť dvoch množín bodov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním vzdialenosti bodu a priamky, bodu a roviny, priamky a roviny, vzdialenosťou dvoch priamok a dvoch rovín.

Definícia 3.1 *Nech* $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$ *sú neprázdne množiny bodov priestoru* $\mathbb{E}_n$. *Reálne číslo*

$$d(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = min\{d(A,B);\ A \in \mathbf{P}, B \in \mathbf{Q}\}$$

nazývame vzdialenosť množín $\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{Q}$.

Poznámka. Keďže pracujeme s obmedzeným aparátom, táto definícia nie je tak všeobecná ako sa bežne používa.

Pre zjednodušenie namiesto označenia $d(\{A\},\mathbf{Q})$ budeme používať označenie $d(A,\mathbf{Q})$.

3.1 Vzdialenosť bodu a priamky

Veta 3.1.1 *Nech* A *je ľubovoľný bod a* p *je ľubovoľná priamka euklidovského priestoru* $\mathbb{E}_n$. *Nech* q *je priamka, ktorá prechádza bodom* A *a je kolmá na priamku* p. *Potom*

$$d(A,p) = d(A,P),$$

kde P *je priesečník priamok* p *a* q.

Obr. 15: Vzdialenosť bodu A a priamky p

Dôkaz. Pre ilustráciu viď obr.15.

Pretože $d(A,P)$ je prvkom množiny $\{d(A,X);\ X \in p\}$, stačí podľa definície 3.1 ukázať, že pre každý bod $X \in p$ platí $d(A,P) \leq d(A,X)$.

Podľa definície 1.1.1 a vety 1.2.2 máme

$$d^2(A,X) = \|X-A\|^2 = (X-A)(X-A).$$

Vzhľadom na to, že $X-A = (X-P)+(P-A)$ a $(P-A)(X-P) = 0$ (keďže $P-A$ a $X-P$ sú smerové vektory priamok q a p a teda navzájom kolmé), tak platí

$$\begin{aligned}
d^2(A,X) &= ((X-P)+(P-A))\cdot((X-P)+(P-A)) = \\
&= (X-P)(X-P)+(X-P)(P-A)+ \\
&\quad +(P-A)(X-P)+(P-A)(P-A) = \\
&= (X-P)(X-P)+(P-A)(P-A) = \\
&= \|X-P\|^2+\|P-A\|^2 = d^2(P,X)+d^2(A,P).
\end{aligned}$$

Pretože vzdialenosť dvoch bodov je nezáporné číslo, tak získavame

$$d^2(A,X) \geq d^2(A,P).$$

Teda

$$d(A,P) \leq d(A,X).$$

q.e.d.

Príklad 3.1.1 Vypočítajte vzdialenosť bodu $B = [3,-7]$ a priamky $p : 4x - 3y + 7 = 0$.

Riešenie. Označme q priamku prechádzajúcu bodom B a kolmú na priamku p.

Normálový vektor $\vec{n} = (4,-3)$ priamky p je zároveň smerovým vektorom priamky q. Teda parametrické vyjadrenie priamky q má tvar

$$\begin{aligned} x &= 3 + 4t \\ y &= -7 - 3t. \end{aligned}$$

Označme P priesečník priamok p a q. Dosadením parametických rovníc priamky q do všeobecnej rovnice priamky p dostaneme súradnice bodu P. Teda
$P = \left[-\frac{17}{5}, -\frac{11}{5}\right]$.

Podľa vety 3.1.1 je vzdialenosť bodu B a priamky p rovná vzdialenosti bodov B a P. Teda dostávame

$$d(B,p) = d(B,P) = \sqrt{\left(-\frac{17}{5} - 3\right)^2 + \left(\frac{-11}{5} + 7\right)^2} = 8.$$

Dôsledok 3.1.2 *Nech A je ľubovoľný bod a p je ľubovoľná priamka euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$. Nech ρ je rovina kolmá na priamku p a prechádzajúca bodom A. Potom*

$$d(A,p) = d(A,P),$$

kde P je priesečník priamky p a roviny ρ.

Dôkaz. Nech q je priamka, ktorá prechádza bodom A a má smerový vektor $P - A$.

Keďže priamka q leží v rovine α, potom je kolmá na priamku p a ich priesečník je bod P.

Podľa vety 3.1.1 dostávame

$$d(A,p) = d(A,P).$$

q.e.d.

Príklad 3.1.2 Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = [1, 2, -3]$ a priamky $p : x = -3 + t, y = -5 - 2t, z = 1 - t$.

Riešenie. Smerový vektor $\vec{s} = (1, -2, -1)$ priamky p je zároveň normálovým vektorom roviny ρ kolmej na priamku p a prechádzajúcej bodom A. Teda všeobecná rovnica roviny ρ je

$$x - 2y - z = 0.$$

Dosadením parametrických rovníc priamky p do všeobecnej rovnice roviny ρ dostaneme súradnice ich priesečníka P. Teda $P = [-4, -3, 2]$.

Podľa dôsledku 3.1.2 máme

$$d(A, p) = d(A, P) = \sqrt{(-4-1)^2 + (-3-2)^2 + (2+3)^2} = 5\sqrt{3}.$$

Veta 3.1.3 *Nech A, B sú ľubovoľné body a $\vec{u}$, $\vec{v}$ sú navzájom kolmé nenulové vektory priestoru $\mathbb{E}_2$. Ak $p = p(A, \vec{u})$, tak platí*

$$d(B, p) = \frac{|(A - B) \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}. \tag{13}$$

Dôkaz. Nech q je priamka kolmá na priamku p a prechádzajúca bodom B. Pre

Obr. 16:

ľubovoľný bod X priamky q potom existuje reálne číslo r také, že $X = B + r\vec{v}$.

Označme P priesečník priamok p a q (viď obr. 16). Keďže bod $P \in q$, tak existuje také reálne číslo r_1, že platí

$$P = B + r_1\vec{v}.$$

Z toho, že $P - A$ je smerový vektor priamky p a $\vec{v}$ je smerový vektor priamky q, máme

$$(P - A) \cdot \vec{v} = 0.$$

Z týchto rovníc získavame

$$(B + r_1\vec{v} - A)\vec{v} = 0.$$

Podľa vety 1.2.2 máme

$$(B - A)\vec{v} + r_1\vec{v}\vec{v} = 0,$$

a tak $r_1 = \frac{-(B-A)\vec{v}}{\|v\|^2}$. Teda platí

$$P = B - \frac{(B-A)\vec{v}}{\|v\|^2}\vec{v}.$$

Z toho podľa vety 3.1.1 , definície 1.1.1 a vety 1.1.2 máme

$$\begin{aligned} d(B,p) &= d(B,P) = \|P-B\| = \left\| B - \frac{(B-A)\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} - B \right\| = \\ &= \left\| \frac{(A-B)\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} \right\| = \frac{|(A-B)\vec{v}|}{\|\vec{v}\|^2}\|\vec{v}\| = \frac{|(A-B)\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 3.1.3 Vypočítajte vzdialenosť bodu $B[-7,3]$ a priamky $p : x = -2 + 3t, y = 1 - t$.

Riešenie. Priamka p prechádza bodom $A = [-2,1]$ a má smerový vektor $\vec{u} = (3,-1)$. Vektor kolmý na vektor $\vec{u}$ má súradnice $\vec{v} = (1,3)$. Podľa vety 3.1.3 platí

$$d(B,p) = \frac{|(-2+7, 1-3)\cdot(1,3)|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Veta 3.1.4 *Nech $L = [l_1, l_2]$ je bod a $ax + by + c = 0$ je rovnica priamky p euklidovskej roviny $\mathbb{E}_2$. Potom platí*

$$d(L,p) = \frac{|al_1 + bl_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{14}$$

Dôkaz. Nech $M = [m_1, m_2]$ je ľubovoľný bod priamky p, čiže platí

$$am_1 + bm_2 + c = 0. \tag{15}$$

Zrejme $\vec{n} = (a,b)$ je normálový vektor priamky p. Vektor kolmý na vektor $\vec{n}$ je $\vec{u} = (-b,a)$.

Podľa vety 3.1.3 a rovnosti (15) dostávame

$$\begin{aligned} d(L,p) &= \frac{|(M-L)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(m_1-l_1)a + (m_2-l_2)b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \\ &= \frac{|-al_1 - bl_2 + am_1 + bm_2)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-al_1 - bl_2 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \\ &= \frac{|al_1 + bl_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 3.1.4 Vypočítajte vzdialenosť bodu $L = [3, 7]$ a priamky $p : 7x - y + 1 = 0$.

Riešenie. Podľa vety 3.1.4 dostávame

$$d(L, p) = \frac{|7.3 - 1.7 + 1|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Príklad 3.1.5 Priamky $p : 2x - 3y - 1 = 0$, $q : 2x + y - 13 = 0$ a $r : -6x + y + 11 = 0$ vytínajú v rovine trojuholník.Vypočítajte veľkosti výšok daného trojuholníka.

Riešenie. Označme A (viď obr.17) priesečník priamok p a r. Pre súradnice

Obr. 17:

$A = [a_1, a_2]$ potom platí

$$\begin{aligned} 2a_1 - 3a_2 - 1 &= 0 \\ -6a_1 + a_2 + 11 &= 0. \end{aligned}$$

Teda $A = [2, 1]$. Nech $B = [b_1, b_2]$ je priesečníkom priamok p a q, čiže

$$\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 - 1 &= 0 \\ 2b_1 + b_2 - 13 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho $B = [5, 3]$. Označme $C = [c_1, c_2]$ priesečník priamok r a q, potom

$$\begin{aligned} -6c_1 + c_2 + 11 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 - 13 &= 0. \end{aligned}$$

Teda $C = [3, 7]$.

Veľkosť výšky je vzdialenosť bodu a priamky, ktorá obsahuje protiľahlú stranu. Čiže v_c je vzdialenosť bodu C a priamky p, v_b je vzdialenosť bodu B a priamky r a v_a je vzdialenosť bodu A a priamky q.

Podľa vety 3.1.4 dostávame

$$\begin{aligned} v_c &= d(C, p) = \frac{|2.3 - 3.7 - 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{16\sqrt{13}}{13}, \\ v_a &= d(A, q) = \frac{|2.2 + 1.1 - 13|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}, \\ v_b &= d(B, r) = \frac{|-6.5 + 1.3 + 11|}{\sqrt{36 + 1}} = \frac{16\sqrt{37}}{37}. \end{aligned}$$

Cvičenia

3.1.1 Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = [5, 1]$ a priamky p, ak
a) $p : 2x - 3y + 5 = 0$;
b) $p : 7x - y + 1 = 0$;
c) $p : 3x + 10y = 0$;
d) $p = (C, B - C)$, $C = [0, 0]$, $B = [2, 3]$.

3.1.2 Určte bod X tak, aby $d(X, p) = 5$ a $d(X, q) = \frac{39}{5}$, ak $p : 5x + 12y = 0$ a $q : 3x - 4y = 0$.

3.1.3 Určte c tak, aby vzdialenosť začiatku súradnicovej sústavy a priamky $q : x + y + c = 0$ bola 5.

3.1.4 Napíšte všeobecnú rovnicu priamky q, ktorá je rovnobežná s priamkou $p : 3x + 4y - 1 = 0$ a vzdialenosť priamky q a bodu $S = [2, -1]$ je rovná 1.

3.1.5 Na priamke $p : x + y - 8 = 0$ nájdite taký bod X, aby vzdialenosť bodu X a bodu $P = [2, 8]$ a vzdialenosť bodu X a priamky $q : x - 3y + 2 = 0$ bola rovnaká.

3.1.6 Určte polomer kružnice so stredom $S = [1, -2]$, ktorá sa dotýka priamky $p : 6y - 8x - 30 = 0$.

3.1.7 Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A = [-3, 4]$, $B = [0, 1]$ a dotýka sa priamky $p : 3x - 4y - 2 = 0$.

3.1.8 Vypočítajte veľkosti výšok trojuholníka ABC, ak $A = [1, 0, -1]$, $B = [2, 2, 1]$ a $C = [1, -2, 1]$.

3.1.9 Vypočítajte veľkosti stenových výšok štvorstena $ABCD$, ak $A = [2, 1, 0]$, $B = [1, -1, 1,]$, $C[3, 0, -1]$ a vrchol $D = [0, 1, -3]$.

Výsledky

3.1.1 a) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$, b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{25\sqrt{109}}{109}$, d) $\sqrt{13}$. **3.1.2** $[13, 0]$, $[-13, 0]$. **3.1.3** $5\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$. **3.1.4** $3x + 4y + 3 = 0$, $3x + 4y - 7 = 0$. **3.1.5** $[3, 5]$, $[-37, 45]$. **3.1.6** 5. **3.1.7** $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$, $(x - \frac{33}{49})^2 + (y - \frac{229}{49})^2 = (\frac{183}{49})^2$. **3.1.8** $\sqrt{\frac{72}{17}}$, 3, $2\sqrt{2}$. **3.1.9** $\frac{\sqrt{114}}{3}$, $\frac{5\sqrt{45}}{9}$, $\frac{\sqrt{462}}{6}$.

3.2 Vzdialenosť bodu a roviny

Veta 3.2.1 *Nech A je ľubovoľný bod a ρ je rovina euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$. Nech q je priamka, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na rovinu ρ. Potom*

$$d(A,\rho) = d(A,P),$$

kde P je priesečník roviny ρ a priamky q.

Dôkaz. Pre ilustráciu viď obr.18.

Obr. 18: Vzdialenosť bodu A a roviny ρ

Pretože $d(A,P)$ je prvkom množiny $\{d(A,X);\ X \in \rho\}$, stačí podľa definície 3.1 ukázať, že pre každý bod $X \in \rho$ platí $d(A,P) \leq d(A,X)$.

Podľa definície 1.1.1 a vety 1.2.2 máme

$$d^2(A,X) = \|X-A\|^2 = (X-A)(X-A).$$

Vzhľadom na to, že $X - A = (X-P)+(P-A)$ a $(P-A)(X-P) = 0$ (keďže $P - A$ je smerový vektor priamky q a $X - P$ je smerový vektor roviny ρ, a teda navzájom kolmé), tak platí

$$\begin{aligned}
d^2(A,X) &= ((X-P)+(P-A))((X-P)+(P-A)) = \\
&= (X-P)(X-P)+(X-P)(P-A)+ \\
&\quad +(P-A)(X-P)+(P-A)(P-A) = \\
&= (X-P)(X-P)+(P-A)(P-A) = \\
&= \|X-P\|^2+\|P-A\|^2 = d^2(P,X)+d^2(A,P).
\end{aligned}$$

Pretože vzdialenosť dvoch bodov je nezáporné číslo, tak získavame

$$d^2(A,X) \geq d^2(A,P).$$

Teda

$$d(A,P) \leq d(A,X).$$

q.e.d.

Príklad 3.2.1 Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = [3,5,-6]$ a roviny $\rho : 2x - 2y + z - 8 = 0$.

Riešenie. Normálový vektor $\vec{n} = (2, -2, 1)$ roviny ρ je zároveň smerovým vektorom priamky kolmej na rovinu ρ. Teda parametrické vyjadrenie priamky q prechádzajúcej bodom A a kolmej na rovinu ρ má tvar

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= -6 + t. \end{aligned}$$

Označme P priesečník priamky q a roviny ρ. Dosadením parametrických rovníc priamky q do všeobecnej rovnice roviny ρ získame jeho súradnice. Teda $P = [7, 1, -4]$.

Vzdialenosť bodu A a roviny ρ je podľa vety 3.2.1 rovná vzdialenosti bodov A a P. Čiže dostávame

$$d(A, \rho) = d(A, P) = \sqrt{(7-3)^2 + (1-5)^2 + (-4+6)^2} = 6.$$

Veta 3.2.2 *Nech rovina ρ je určená bodom A a normálovým vektorom $\vec{n}$. Nech B je ľubovoľný bod priestoru $\mathbb{E}_3$. Potom platí*

$$d(B, \rho) = \frac{|(A - B) \cdot \vec{n}|}{\| \vec{n} \|}.$$

Dôkaz. Nech q je priamka kolmá na rovinu ρ a prechádzajúca bodom B. Pre

Obr. 19:

ľubovoľný bod X priamky q potom existuje reálne číslo r také, že $X = B + r\vec{n}$.

Označme P priesečník priamky q a roviny ρ (viď obr.19). Keďže $P \in q$, potom existuje také reálne číslo r_1, že platí

$$P = B + r_1\vec{n}.$$

Z toho, že $P - A$ je smerový vektor roviny ρ a $\vec{n}$ je jej normálový vektor dostávame

$$(P - A) \cdot \vec{n} = 0.$$

Z týchto rovníc máme

$$(B + r_1\vec{n} - A)\vec{n} = 0.$$

Podľa vety 1.2.2 máme

$$(B - A)\vec{n} + r_1\vec{n}\vec{n} = 0,$$

a tak $r_1 = \frac{-(B-A)\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$. Teda platí

$$P = B - \frac{(B-A)\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Z toho podľa vety 3.2.1, definície 1.1.1 a vety 1.1.2 máme

$$\begin{aligned} d(B,\rho) &= d(B,P) = \|P - B\| = \left\| B - \frac{(B-A)\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} - B \right\| = \\ &= \left\| \frac{(A-B)\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \right\| = \frac{|(A-B)\vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{|(A-B)\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 3.2.2 Vypočítajte vzdialenosť bodu $B = [-7, 0, -1]$ a roviny $\rho : 4x + 12y - 3z - 1 = 0$.

Riešenie. Vektor $\vec{n} = (4, 12, -3)$ je normálový vektor roviny ρ. Ľubovoľný bod patriaci rovine ρ má súradnice $\left[x, y, \frac{4x+12y-1}{3}\right]$. Teda napríklad bod $A = [1, 1, 5]$ patrí rovine ρ.

Podľa vety 3.2.2 dostávame

$$d(B,\rho) = \frac{|(1+7, 1-0, 5+1)\cdot(4,12,-3)|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + (-3)^2}} = 2.$$

Veta 3.2.3 *Nech $L = [l_1, l_2, l_3]$ je bod a $ax + by + cz + d = 0$ je rovnica roviny ρ euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$. Potom platí*

$$d(L,\rho) = \frac{|al_1 + bl_2 + cl_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{16}$$

Dôkaz. Nech $M = [m_1, m_2, m_3]$ je ľubovoľný bod roviny ρ, čiže platí

$$am_1 + bm_2 + cm_3 + d = 0. \tag{17}$$

Zrejme $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor roviny ρ.

Podľa vety 3.2.2 a rovnosti (17) dostávame

$$\begin{aligned} d(L,\rho) &= \frac{|(M-L)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(m_1-l_1)a + (m_2-l_2)b + (m_3-l_3)c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \\ &= \frac{|-al_1 - bl_2 - cl_3 + am_1 + bm_2 + cm_3)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \\ &= \frac{|-al_1 - bl_2 - cl_3 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|al_1 + bl_2 + cl_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Príklad 3.2.3 Vypočítajte vzdialenosť bodu $L = [-1, 3, 2]$ a roviny $\rho : 3x - 4y + 5z + 15 = 0$.

Riešenie. Podľa vety 3.2.3 dostávame

$$d(L, \rho) = \frac{|3.(-1) + (-4).3 + 5.2 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

Príklad 3.2.4 Vypočítajte veľkosť výšky štvorbokého ihlana $ABCDV$ s vrcholom V, ak $A = [2, -1, 2]$, $B = [0, 0, 5]$, $C = [-1, 0, 5]$, $D = [4, -3, -4]$ a $V = [1, 2, 1]$.

Riešenie.

Obr. 20:

Označme ρ rovinu prechádzajúcu bodmi A, B, C. Smerové vektory roviny ρ sú $\vec{u} = B - A = (-2, 1, 3)$, $\vec{v} = C - A = (-3, 1, 3)$. Normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ je kolmý na smerové vektory roviny ρ. Teda podľa definície 1.3.1 a vety 1.3.2 dostávame

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, -3, 1).$$

Všeobecná rovnica roviny ρ má tvar

$$-3y + z - 5 = 0.$$

Veľkosť výšky v ihlana $ABCDV$ je vzdialenosť bodu V a roviny ABC (viď obr. 20). Podľa vety 3.2.3 máme

$$d(V, \rho) = \frac{|0.1 + (-3).2 + 1.1 - 5|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \sqrt{10}.$$

Cvičenia

3.2.1 Vypočítajte vzdialenosť bodu $D = [1, 1, 1]$ a roviny α, ak
a) $\alpha : 4x + 4y + z - 42 = 0$;
b) $\alpha : 3x - 2y + 4z - 5 = 0$;
c) $\alpha : x = 2 + s + 2t, y = 2 + 2s + t, z = 2 + 3s + 3t$;
d) $\alpha : x = 3 + 2s - 3t, y = 1 - 2s + 3t, z = 4s - 5t$.

3.2.2 Určte vzdialenosť začiatku súradnicovej sústavy a roviny $\alpha : 15x - 10y + 6z = 190$.

3.2.3 Určte vzdialenosť bodu M a roviny ρ, ak $M = [-7, 3, 1]$ a rovina ρ prechádza bodmi $A = [1, 0, 1]$, $B = [2, 2, 1]$, $C = [0, 0, 2]$.

3.2.4 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá je kolmá na priamku $p: 2x - y + z = 0, 6x - y + z - 4 = 0$ a vzdialenosť začiatku súradnicovej sústavy a roviny α je $\sqrt{29}$.

3.2.5 Na osi z nájdite taký bod A, aby vzdialenosť bodu A a roviny $\alpha : x + 4y - 3z - 2 = 0$ a vzdialenosť bodu A a roviny $\beta : 5x + z + 8 = 0$ bola rovnaká.

3.2.6 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá je rovnobežná s rovinou $\mu : x+y+z-6 = 0$ a vzdialenosť začiatku súradnicovej sústavy a roviny α je $\sqrt{3}$.

3.2.7 Nech $ABCDEFGH$ je kocka s hranou $a = 1$. Vypočítajte vzdialenosť bodu F a roviny BGE.

3.2.8 Vypočítajte veľkosť telesových výšok štvorstena $ABCD$, ak $A = [2, 1, 0]$, $B = [1, -1, 1]$, $C = [3, 0, -1]$, $D = [0, 1, -3]$.

Výsledky

3.2.1 a) $\sqrt{33}$, b) 0, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.2.2** 10. **3.2.3** $\frac{11\sqrt{3}}{3}$. **3.2.4** $y + z + \sqrt{58} = 0$, $y+z-\sqrt{58} = 0$. **3.2.5** $[0, 0, 3]$, $\left[0, 0, -\frac{5}{2}\right]$. **3.2.6** $x+y+z+3 = 0$, $x+y+z-3 = 0$. **3.2.7** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **3.2.8** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\frac{15\sqrt{38}}{38}$, $\frac{15\sqrt{77}}{77}$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

3.3 Vzdialenosť dvoch rovín

Dve roviny môžu byť rôznobežné, rovnobežné rôzne a rovnobežné totožné.

Podľa definície 3.1 vzdialenosť rôznobežných rovín a rovnobežných totožných rovín je nulová. Preto sa budeme ďalej zaoberať len vzdialenosťou dvoch rovnobežných rôznych rovín.

Veta 3.3.1 *Nech α a β sú rovnobežné roviny priestoru $\mathbb{E}_3$ a nech A je ľubovoľný bod roviny α. Potom*

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta).$$

Dôkaz. Nech p je priamka, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na rovinu β . Označme P priesečník roviny β a priamky p (pre ilustráciu viď obr. 21).

Obr. 21: Vzdialenosť rovín α a β

Podľa vety 3.2.1 vieme, že vzdialenosť bodu A a roviny β je rovná vzdialenosti bodu A a bodu P. Keďže $d(A,P)$ je prvkom množiny $\{d(X,Y);\ X\in\alpha, Y\in\beta\}$ stačí ukázať, že

$$(\forall X\in\alpha)(\forall Y\in\beta)\ d(A,P)\leq d(X,Y).$$

Nech $X\in\alpha$ a $Y\in\beta$ sú ľubovoľné body. Z toho, že roviny α a β sú rovnobežné, bod $R=P+(X-A)\in\beta$.

Okrem toho platí

$$X-R=(X-P)-(X-A)=(A-X)+(X-P)=A-P.$$

Vektor $A-P$ je smerový vektor priamky p a teda kolmý na rovinu β. Teda aj vektor $X-R$ je kolmý na rovinu β.

Priamka q, ktorá prechádza bodom X a má smerový vektor $X-R$, je kolmá na rovinu β.

Bod R je priesečník priamky q a roviny β. Keďže

$$(X-R)=(A-P),$$

tak

$$d(X,R)=d(A,P).$$

Vzhľadom na vetu 3.2.1 pre každý bod $Y\in\beta$ platí $d(X,R)\leq d(X,Y)$. Potom

$$d(A,P)=d(X,R)\leq d(X,Y).$$

q.e.d.

Príklad 3.3.1 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných rovín $\alpha: 5x-2y-z+1=0$ a $\beta: 5x-2y-z+7=0$.

Riešenie. Podľa vety 3.3.1 vzdialenosť rovín α a β je vzdialenosť ľubovoľného bodu roviny α a roviny β. Teda napríklad aj vzdialenosť bodu $A=[1,1,4]$ a roviny β. Čiže podľa vety 3.2.3 dostávame

$$d(\alpha,\beta)=d(A,\beta)=\frac{|5.1-2.1-1.4+7|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Dôsledok 3.3.2 *Nech rovina $\alpha: ax+by+cz+d_1=0$ a rovina $\beta: ax+by+cz+d_2=0$ sú rovnobežné roviny priestoru $\mathbb{E}_3$. Potom pre vzdialenosť rovín α, β platí*

$$d(\alpha,\beta)=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Dôkaz. Nech $P = [p_1, p_2, p_3]$ je ľubovoľný bod roviny α, potom $ap_1 + bp_2 + cp_3 = -d_1$. Preto podľa vety 3.3.1 a vety 3.2.3 dostávame

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d_1 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

q.e.d.

Príklad 3.3.2 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných rovín $\alpha : x - 3y + 5z - 2 = 0$ a $\beta : x - 3y + 5z + 33 = 0$.

Riešenie. Podľa dôsledku 3.3.2 máme

$$d(\alpha, \beta) = \frac{|33 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \sqrt{35}.$$

Príklad 3.3.3 Vypočítajte vzdialenosť rovín ABC a EFG kvádra $ABCDEFGH$, ak $d(B, E) = 7$, $d(B, H) = 10$, $d(A, H) = 8$.

Riešenie. Označme α rovinu ABC a β rovinu EFG (viď obr. 22).

Obr. 22:

Trojuholník BEH je pravouhlý a podľa Pytagorovej vety máme

$$d(E, H) = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}.$$

Podobne trojuholník AEH je pravouhlý a podľa Pytagorovej vety dostávame

$$d(A, E) = \sqrt{8^2 - (\sqrt{51})^2} = \sqrt{13}.$$

Roviny α a β sú rovnobežné, a teda podľa vety 3.3.1 ich vzdialenosť je rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu (napr. A) a roviny β. Priamka obsahujúca úsečku $\overline{AE}$ je kolmá na rovinu β a priesečník tejto priamky a roviny β je bod E. Z toho podľa vety 3.2.1 dostávame

$$d(\alpha, \beta) = d(A, E) = \sqrt{13}.$$

Cvičenia

3.3.1 Vypočítajte vzdialenosť rovín α a β, ak

a) $\alpha : 4x + 3y - 5z = 8$, $\beta : 4x + 3y - 5z + 12 = 0$;

b) $\alpha : -x + 2y + z = 7$, $\beta : 3x - 6y - 3z = 0$;

c) $\alpha : 11x - 2y - 10z + 15 = 0$, $\beta : 11x - 2y - 10z - 45 = 0$;

d) $\alpha : 2x - y + z - 9 = 0$, $\beta : x + y - z = 0$;

e) $\alpha : 2x + 3y - 6z = -14$, $\beta : 2x + 3y - 6z = 35$.

3.3.2 Napíšte rovnicu roviny α, ktorá je rovnobežná s rovinou γ a vzdialenosť roviny α a γ je v, ak
a) $\gamma : 3x - 6y - 2z + 14 = 0,\ v = 3;$
b) $\gamma : 4x + 2y - 4z = 27,\ v = 5.$

3.3.3 Vypočítajte veľkosť hrany kocky, ktorej dve steny ležia v rovinách
a) $2x - 2y + z + 5 = 0$, $2x - 2y + z + 2 = 0$;
b) $3x - 4z + 8 = 0$, $6x - 8z - 4 = 0$.

3.3.4 Daná je kocka $ABCDEFGH$, $d(A, B) = 5$. Body K, L, M, N sú stredy hrán AD, BC, EH, GH. Vypočítajte vzdialenosť rovín AMN a KLH.

3.3.5 Daná je kocka $ABCDEFGH$. Vypočítajte vzdialenosť rovín ACH a BGE, ak telesová uhlopriečka kocky má veľkosť u.

Výsledky

3.3.1 a) $2\sqrt{2}$, b) $\frac{7\sqrt{6}}{6}$, c) 4, d) 0, e) $\sqrt{49}$. **3.3.2** a) $3x - 6y - 2z - 7 = 0$, $3x - 6y - 2z + 35 = 0$, b) $4x + 2y - 4z - 54 = 0$, $4x + 2y - 4z + 6 = 0$. **3.3.3** a) 1, b) 2. **3.3.4** 0. **3.3.5** $\frac{u}{3}$.

3.4 Vzdialenosť dvoch priamok

Dve priamky môžu byť rovnobežné rôzne, rovnobežné totožné, rôznobežné a mimobežné.

Podľa definície 3.1 je vzdialenosť dvoch rôznobežných priamok alebo rovnobežných totožných priamok nulová. Preto sa v ďalších úvahach budeme zaoberať len vzdialenosťou priamok, ktoré nemajú spoločný bod.

Veta 3.4.1 *Nech p a q sú rovnobežné priamky priestoru E_n, nech A je ľubovoľný bod priamky p. Potom*

$$d(p, q) = d(A, q).$$

Dôkaz. Nech r je priamka, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na priamku q. Označme P priesečník priamky q a priamky r (pre ilustráciu viď obr. 23).

Obr. 23: Vzdialenosť priamok p a q

Podľa vety 3.1.1 vieme, že vzdialenosť bodu A a priamky q je rovná vzdialenosti bodu A a bodu P. Keďže $d(A,P)$ je prvkom množiny $\{d(X,Y);\ X \in p, Y \in q\}$ stačí ukázať, že

$$(\forall X \in p)(\forall Y \in q)\ d(A,P) \leq d(X,Y).$$

Nech $X \in p$ a $Y \in q$ sú ľubovoľné body. Z toho, že priamky p a q sú rovnobežné, bod $R = P + (X - A) \in q$. Okrem toho platí

$$X - R = (X - P) - (X - A) = (A - X) + (X - P) = A - P.$$

Vektor $A - P$ je smerový vektor priamky r a teda kolmý na priamku q. A teda aj vektor $X - R$ je kolmý na priamku q.

Priamka k, ktorá má smerový vektor $X - R$ a prechádza bodom X, je kolmá na priamku q.

Bod R je priesečník priamok k a q. Keďže

$$(X - R) = (A - P),$$

tak

$$d(X,R) = d(A,P).$$

Vzhľadom na vetu 3.1.1 pre každý bod $Y \in q$ platí $d(X,R) \leq d(X,Y)$. Potom

$$d(A,P) = d(X,R) \leq d(X,Y).$$

q.e.d.

Príklad 3.4.1 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných priamok $p: x = 1 - t, y = 4 + 2t, z = 5 + 4t$ a $q: x = 2 - t, y = -2 + 2t, z = 3 + 4t$.

Riešenie. Podľa vety 3.4.1 vzdialenosť priamok p a q je rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu priamky p a priamky q. Teda napr. bodu $A = [1, 4, 5]$ a priamky q.

Smerový vektor $\vec{s} = (-1, 2, 4)$ priamky q je zároveň normálovým vektorom roviny ρ kolmej na priamku q a prechádzajúcej bodom A. Teda všeobecná rovnica roviny ρ je

$$-x + 2y + 4z - 27 = 0.$$

Označme P priesečník roviny ρ a priamky q. Dosadením parametrických rovníc priamky q do všeobecnej roviny ρ získame jeho súradnice. Teda

$$P = [1, 0, 7].$$

Podľa dôsledku 3.1.2 máme

$$d(A,q) = d(A,P) = \sqrt{(1-1)^2 + (0-4)^2 + (7-5)^2} = 2\sqrt{5}.$$

Dôsledok 3.4.2 *Nech* $p : ax + by + c_1 = 0$ *a* $q : ax + by + c_2 = 0$ *sú rovnobežné priamky priestoru* $\mathbb{E}_2$*. Potom pre vzdialenosť priamok* p *a* q *platí*

$$d(p, q) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dôkaz. Nech $P = [p_1, p_2]$ je ľubovoľný bod priamky p. Potom $ap_1 + bp_2 = -c_1$ a podľa vety 3.4.1 a vety 3.1.4 dostávame

$$d(p, q) = d(P, q) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

q.e.d.

Príklad 3.4.2 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežných priamok $p : 4x - 3y - 1 = 0$ a $q : 4x - 3y + 7 = 0$.

Riešenie. Podľa dôsledku 3.4.2 platí

$$d(p, q) = \frac{|7 - (-1)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{8}{5}.$$

Definícia 3.4.1 *Osou mimobežných priamok* p *a* q *budeme rozumieť priamku rôznobežnú s obidvoma priamkami* p *a* q *a kolmú na každú z nich.*

Veta 3.4.3 *Nech* p *a* q *sú mimobežné priamky priestoru* $\mathbb{E}_3$ *a nech* o *je os týchto priamok. Potom*

$$d(p, q) = d(A, B),$$

kde A *je priesečník osi* o *a priamky* p *a* B *je priesečník osi* o *a priamky* q.

Obr. 24:

Dôkaz. Nech α je rovina obsahujúcu priamku p a rovnobežná s priamkou q. Nech β je rovina rovnobežná s rovinou α a obsahujúca priamku q (viď obr. 24).

Keďže os o je kolmá na priamku p aj q, tak je kolmá na rovinu α a teda aj β. Podľa vety 3.3.1 a vety 3.2.1 dostávame

$$d(\alpha, \beta) = d(A, B).$$

Podľa definície 3.1 máme

$$\begin{aligned} d(A, B) &= min\{d(X, Y);\ X \in \alpha, Y \in \beta\} \leq \\ &\leq min\{d(X, Y);\ X \in p, Y \in q\} = d(p, q). \end{aligned}$$

Keďže $A \in p$, $B \in q$, tak

$$d(p,q) \leq d(A,B).$$

Teda dostávame

$$d(p,q) = d(A,B).$$

q.e.d.

Príklad 3.4.3 Určte os mimobežiek p a q a vypočítajte vzdialenosť priamok p a q, ak
$p : x = 2t, y = -15 - t, z = -6 + 3t$,
$q : x = 3 + 4s, y = 4 + 2s, z = 2 - 3s$.

Riešenie: Smerové vektory priamok p a q sú $\vec{s_p} = (2,-1,3)$, $\vec{s_q} = (4,2,-3)$.

Obr. 25:

Os r mimobežiek p a q je kolmá na priamky p a q, preto

$$\vec{s_r} = \vec{s_p} \times \vec{s_q} = (-3, 18, 8)$$

je smerový vektor priamky r.

Nech α je rovina obsahujúca priamku q a r (viď obr. 25). Keďže bod $A = [3,4,2]$ patrí priamke q, tak bod A patrí aj rovine α. Priamky p a r sú rôznobežné, čiže rovina α prechádzajúca bodom A má nekolineárne smerové vektory $\vec{s_q}$ a $\vec{s_r}$. Teda jej parametrické rovnice sú:

$$\begin{aligned} x &= 3 + 4u - 3v \\ y &= 4 + 2u + 18v \\ z &= 2 - 3u + 8v. \end{aligned}$$

Z toho všeobecná rovnica roviny α je

$$70x - 23y + 78z - 274 = 0.$$

Nech K je priesečníkom priamok p a r. Keďže v rovine α leží priamka r (a teda aj bod K), tak K je priesečníkom priamky p a roviny α. Dosadením parametrických rovníc priamky p do všeobecnej rovnice roviny α dostaneme jeho súradnice. Teda $K = [2, -16, -3]$.

Os r prechádza bodom K a má smerový vektor $\vec{s_r}$, teda jej parametrické rovnice sú

$$\begin{aligned} x &= 2-3c \\ y &= -16+18c \\ z &= -3+8c,\ c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nech L je priesečník priamok q a r. Porovnaním pravých strán parametrických rovníc priamok q a r získame súradnice bodu L. Čiže $L=[-1,2,5]$.

Podľa vety 3.4.3 vzdialenosť mimobežiek p a q je rovná vzdialenosti bodov K a L. Teda

$$d(K,L)=\sqrt{(-3)^2+18^2+8^2}=\sqrt{397}.$$

Veta 3.4.4 *Nech $p(A,\vec{u})$ a $q(B,\vec{v})$ sú mimobežné priamky priestoru $\mathbb{E}_3$. Potom*

$$d(p,q)=\frac{|\langle (B-A),\vec{u},\vec{v}\rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}.$$

Dôkaz.

Obr. 26:

Nech o je os mimobežných priamok p a q. Označme P priesečník priamok o a p, Q priesečník priamok o a q (viď obr. 26).

Podľa vety 1.3.2 je vektor $\vec{u}\times\vec{v}$ kolmý na $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a teda je smerový vektor osi o. Vektor $P-Q$ je t_0–násobkom vektora $\vec{u}\times\vec{v}$ resp. t_1–násobkom jednotkového vektora $\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$. Čiže

$$P-Q=t_0(\vec{u}\times\vec{v})=t_1\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}. \tag{18}$$

Vektor $A-P$ je smerový vektor priamky p a teda je kolmý na smerový vektor osi o. Podľa vety 1.2.3 dostávame

$$(A-P)(\vec{u}\times\vec{v})=0.$$

A teda aj skalárny súčin vektora $A-P$ a normovaného vektora $\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$ je rovný nule. Teda máme

$$(A-P)\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}=0.$$

Podobne

$$(Q-B)\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}=0.$$

Keďže $(A-B) = (A-P+P-Q+Q-B)$, potom podľa vlastností skalárneho súčinu máme

$$\begin{aligned}
&(A-B)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = (A-P+P-Q+Q-B)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = \\
&= (A-P)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} + (P-Q)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} + (Q-B)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = \\
&= (P-Q)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}.
\end{aligned}$$

Keďže $\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = 1$ a $P-Q = t_1\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$, tak platí

$$t_1 = t_1.1 = t_1\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = (P-Q)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = (A-B)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}.$$

Podľa vety 1.1.2 dostávame

$$\begin{aligned}
\|P-Q\| &= \left\|t_1\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\right\| = |t_1|\cdot\left\|\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\right\| = \\
&= |t_1|\cdot\frac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = |t_1|.
\end{aligned}$$

Teda platí

$$\|P-Q\| = |t_1| = \left|(A-B)\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\right|.$$

Podľa vety 3.4.3 a vety 1.2.2 máme

$$\begin{aligned}
d(p,q) &= d(P,Q) = \|P-Q\| = \left|(A-B)\frac{(\vec{u}\times\vec{v})}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\right| = \\
&= \frac{|(A-B)(\vec{u}\times\vec{v})|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = \frac{|\langle B-A,\vec{u},\vec{v}\rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Poznámka. Všimnite si, že nie je potrebné, aby priamky p, q boli mimobežné, stačí, aby neboli rovnobežné, presnejšie, aby vektor $\vec{u}\times\vec{v}$ bol nenulový.

Príklad 3.4.4 Vypočítajte vzdialenosť priamok $p: x = 2-3t, y = 8-t, z = 3-4t$ a $q: x = 1+2t, y = 4+3t, z = 5-2t$.

Riešenie. Priamka p obsahuje bod $A = [2,8,3]$ a má smerový vektor $\vec{u} = (-3,-1,-4)$. Priamka q obsahuje bod $B = [1,4,5]$ a má smerový vektor $\vec{v} = (2,3,-2)$.

Zmiešaný súčin vektorov $B-A$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ je podľa definície 1.4.1 rovný

$$\langle (B-A),\vec{u},\vec{v}\rangle = ((-1,-4,2)\times(-3,-1,-4))\cdot(2,3,-2) = 28.$$

Veľkosť vektorového súčinu vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je rovná

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(-3, -1, -4) \times (2, 3, -2)\| = 21.$$

Podľa vety 3.4.4 máme

$$d(p, q) = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}.$$

Príklad 3.4.5 Vypočítame vzdialenosť priamky $p : x + 2y + z - 5 = 0, x - 2y - 3z - 1 = 0$ a priamky $q : x = -6 + 3t, y = -3, z = -2t$.

Riešenie. Priamka p je určená ako prienik rovín $\pi : x + 2y + z - 5 = 0$ a $\mu : x - 2y - 3z - 1 = 0$. Normálové vektory obidvoch rovín sú kolmé na smerový vektor priamky p. Vektor

$$(-4, 4, -4) = (1, 2, 1) \times (1, -2, -3)$$

je teda smerový vektor priamky p. Kvôli jednoduchosti však budeme pracovať so smerovým vektorom $\vec{s_p} = (1, -1, 1)$.

Keďže súradnice bodu $A = [5, -1, 2]$ spĺňajú rovnice rovín π a μ, tak $A \in p$.

Parametrické vyjadrenie priamky p má tvar

$$\begin{aligned} x &= 5 + s \\ y &= -1 - s \\ z &= 2 + s. \end{aligned}$$

Keďže smerové vektory priamok p a q sú lineárne nezávislé, priamky p a q sú buď rôznobežné, alebo mimobežné.

Prienikom priamky q a roviny π je bod so súradnicami $[45, -3, -34]$, ktorý neleží v rovine μ. Preto priamky q a p sú mimobežné.

Keďže $B = [-6, -3, 0] \in q$ a $A \in p$, vektor $\vec{s_q} = (3, 0, -2)$ je smerový vektor priamky q a vektor $\vec{s_p}$ je smerový vektor priamky p, tak podľa vety 3.4.4 dostávame

$$d(p, q) = \frac{|\langle(-11, -2, -2), (1, -1, 1), (3, 0, -2)\rangle|}{\|(1, -1, 1) \times (3, 0, -2)\|} = \sqrt{38}.$$

Cvičenia

3.4.1 Určte os mimobežiek p a q, ak
$p : x = 13 + 2t, y = 3t, z = 43 - 4t$;
$q : x = -3s, y = s, z = 3 + 2s$.

3.4.2 Vypočítajte vzdialenosť rovnobežiek p a q, ak
a) $p: 3x - 2y + 20 = 0$, $q: 6x - 4y + 7 = 0$;
b) $p: x + 2y - 10 = 0$, $q: x = 3 - 2t, y = 1 + t$;
c) $p: x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$, $q: x = 1 + t, y = -2 + 3t$.

3.4.3 Zistite vzdialenosť priamok p a q, ak
a) $p: x = 2 + s, y = 2 + 2s, z = 2 + 3s$, $q: x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 3 - t$;
b) $p: x = 5 + 4s, y = -2s, z = -1 + 6s$, $q: x = 7 - 6t, y = 6 + 3t, z = 5 - 9t$;
c) $p: x = 1 + 2s, y = 1 + 2s, z = 1 + 2s$, $q: x = 2 + t, y = 2 + t, z = -1 - t$;
d) $p: x = 9 + 2s, y = -s, z = 2 + 3s$, $q: x = 7 + 6t, y = 3 + t, z = -t$.

3.4.4 Vypočítajte vzdialenosť mimobežiek $p: x = 3t, y = -2t, z = 1 + t$ a $q: x = 5 - s, y = 1 + 2s, z = -3s$.

3.4.5 Vypočítajte najväčšiu možnú vzdialenosť dvoch mimobežných hrán štvorstena $ABCD$, $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$ (Vzdialenosťou dvoch mimobežných hrán rozumieme vzdialenosť dvoch priamok obsahujúcich tieho hrany).

3.4.6 Určte vzdialenosť priamok obsahujúcich hrany EF a AB pravidelného trojbokého hranola $ABCDEF$, ak $d(A, B) = d(A, E) = 1$.

Výsledky

3.4.1 $x = 3 + 10t, y = -1 + 8t, z = 1 + 11t$. **3.4.2** a) $\frac{\sqrt{13}}{2}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. **3.4.3** a) $\frac{2\sqrt{83}}{83}$, b) 0, c) 0, d) $\frac{8\sqrt{13}}{13}$. **3.4.4** $\sqrt{6}$. **3.4.5** $\frac{2\sqrt{901}}{53}$. **3.4.6** 1.

3.5 Vzdialenosť priamky a roviny

Priamka buď leží v rovine, alebo priamka je rovnobežná s rovinou ale neleží v nej, alebo priamka je rôznobežná s rovinou.

Keď priamka leží v rovine, alebo keď priamka a rovina sú rôznobežné, tak podľa definície 3.1 je vzdialenosť priamky a roviny rovná nule.

V ďalších úvahach sa preto budeme zaoberať vzdialenosťou priamky a roviny, kde priamka je rovnobežná s rovinou, ale neleží v nej.

Veta 3.5.1 *Nech p je priamka a ρ je rovina euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ a nech sú rovnobežné. Nech A je ľubovoľný bod priamky p. Potom*

$$d(p, \rho) = d(A, \rho).$$

Obr. 27:

Dôkaz. Nech X je ľubovoľný bod priamky p. Nech q je priamka, kolmá na rovinu ρ a prechádzajúca bodom A. Označme P priesečník priamky p a roviny ρ (viď obr. 27).

Podľa vety 3.2.1 vieme, že vzdialenosť bodu A a roviny ρ je rovná vzdialenosti bodov A a P. Keďže $d(A, P)$ je prvkom množiny $\{d(X, Y);\ X \in p, Y \in \rho\}$ stačí ukázať, že

$$(\forall X \in p)(\forall Y \in \rho)\ d(A, P) \leq d(X, Y).$$

Nech $X \in p$ a $Y \in \rho$ sú ľubovoľné body. Z toho, že priamka p a rovina ρ sú rovnobežné, bod $R = P + (X - A) \in \rho$. Okrem toho platí

$$X - R = (X - P) - (X - A) = (A - X) + (X - P) = A - P.$$

Vektor $A - P$ je smerový vektor priamky q , teda kolmý na rovinu ρ. Potom aj vektor $X - R$ je kolmý na rovinu ρ.

Priamka r, ktorá prechádza bodom X a má smerový vektorom $X - R$ je kolmá na rovinu ρ.

Bod R je priesečník priamky r a roviny ρ. Keďže

$$(X - R) = (A - P),$$

tak

$$d(X, R) = d(A, P).$$

Vzhľadom na vetu 3.2.1 pre každý bod $Y \in \rho$ platí $d(X, R) \leq d(X, Y)$. Potom

$$d(A, P) = d(X, R) \leq d(X, Y).$$

q.e.d.

Príklad 3.5.1 Vypočítajte vzdialenosť priamky $p : x = 1-2t, y = 3-4t, z = 2+t$ a roviny $\rho : 4x - y + 4z - 3 = 0$.

Riešenie. Keďže smerový vektor $\vec{s_p} = (-2, -4, 1)$ priamky p a normálový vektor $\vec{n} = (4, -1, 4)$ roviny ρ sú kolmé, potom priamka p a rovina ρ sú rovnobežné.

Podľa vety 3.5.1 vzdialenosť priamky p a roviny ρ je rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu priamky p a roviny ρ. Teda napr. bodu $A = [1, 3, 2]$ a roviny ρ. Podľa vety 3.2.3 máme

$$d(p, \rho) = d(A, \rho) = \frac{|4.1 + (-1).3 + 4.2 - 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6\sqrt{33}}{33}.$$

Dôsledok 3.5.2 *Nech priamka p obsahujúca bod $R = [r_1, r_2, r_3]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ sú rovnobežné. Potom pre vzdialenosť priamky p a roviny α platí*

$$d(p, \alpha) = \frac{|ar_1 + br_2 + cr_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dôkaz. Dôkaz vyplýva priamo z vety 3.5.1 a vety 3.2.3.

Príklad 3.5.2 Vypočítajte vzdialenosť priamky $p : x = 1-2t, y = 1+2t, z = 1-3t$ a roviny $\omega : 2x + 8y + 4z - 4 = 0$.

Riešenie. Keďže smerový vektor $\vec{s} = (-2, 2, -3)$ priamky p a normálový vektor $\vec{n} = (2, 8, 4)$ roviny ω sú navzájom kolmé, tak priamka p je rovnobežná s rovinou ω.

Z toho, že $A = [1, 1, 1] \in p$, podľa dôsledku 3.5.2 platí

$$d(p, \omega) = \frac{|2.1 + 8.1 + 4.1 - 4|}{\sqrt{2^2 + 8^2 + 4^2}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}.$$

Príklad 3.5.3 Vypočítajte veľkosť výšky trojbokého ihlana $ABCV$, ak $A = [1, 2, 1]$, $B = [-1, 3, 4]$, $C = [2, 3, -1]$ a vrchol V leží na priamke $p : x = 1 + 4t, y = 3 - 2t, z = -1 - 6t$.

Riešenie. Označme α rovinu podstavy ihlana $ABCV$ (viď obr. 28). Keďže $B - A =$

Obr. 28:

$(-2, 1, 3)$, $C - A = (1, 1, -2)$, pre normálový vektor $\vec{n}$ roviny α platí

$$\vec{n} = (B - A) \times (C - A) = (-5, -1, -3).$$

Potom všeobecná rovnica roviny α je

$$5x + y + 3z - 10 = 0.$$

Normálový vektor $\vec{n}$ roviny α a smerový vektor $\vec{u} = (4, -2, -6)$ priamky p sú navzájom kolmé, čiže priamka p a rovina α sú rovnobežné.

Veľkosť výšky ihlana je vzdialenosť vrcholu a roviny podstavy. Z toho, že priamka p a rovina α sú rovnobežné, veľkosť výšky ihlana $ABCV$ je vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky p a roviny α. Teda napr. aj bodu $D = [1, 3, -1]$ a roviny α. Podľa vety 3.2.3 máme

$$d(D, \alpha) = \frac{|5.1 + 1.3 + 3.(-1) - 10|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

Cvičenia

3.5.1 Vypočítajte vzdialenosť priamky p a roviny ρ, ak
a) $p : x = t, y = -1 - 3t, z = 5$, $\rho : 3x + y - 2z + 11 = 0$;
b) $p : x = 1 - t, y = -2 + t, z = 3 + 2t$, $\rho : 2x + 4y - z + 5 = 0$;
c) $p = (A, B - A), A = [2, 3, -1], B = [2, 1, 5]$, $\rho : -3x - 5y + 2z = 0$.

3.5.2 Je daná kocka $ABCDEFGH$. Vypočítajte vzdialenosť priamky obsahujúcej hranu AD a roviny EFG, ak veľkosť telesovej uhlopriečky kocky je u.

Výsledky

3.5.1 a) 0, b) $\frac{4\sqrt{21}}{21}$, c) $\frac{23\sqrt{38}}{38}$. **3.5.2** $\frac{\sqrt{3}u}{3}$.

4 Obsahy mnohouholníkov

4.1 Obsah trojuholníka

Definícia 4.1.1 *Obsahom trojuholníka ABC v priestore $\mathbb{E}_3$ rozumieme reálne číslo $S(\triangle ABC)$, pre ktoré platí*

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\|.$$

Poznámka. Rovinu $\mathbb{E}_2$ môžeme chápať ako súradnicovú rovinu priestoru $\mathbb{E}_3$, teda predošlú definíciu môžeme využiť aj v $\mathbb{E}_2$ doplnením nulovej z-tovej súradnice.

Príklad 4.1.1 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak
a) $A = [5, 2, -1]$, $B = [6, -2, 2]$, $C = [1, 1, 1]$;
b) $A = [5, -2]$, $B = [4, 7]$, $C = [-3, -5]$.

Riešenie: a) Keďže $B - A = (1, -4, 3)$ a $C - A = (-4, -1, 2)$, potom vektor $(B - A) \times (C - A)$ má podľa definície 1.3.1 súradnice

$$(B - A) \times (C - A) = (-5, -14, -17).$$

Podľa definície 4.1.1 platí

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-14)^2 + (-17)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{510}. \end{aligned}$$

b) Doplňme z-tovú súradnicu bodov A, B, C. Uvažujme teda $A = [5, -2, 0]$, $B = [4, 7, 0]$, $C = [-3, -5, 0]$.

Potom $B - A = (-1, 9, 0)$, $C - A = (-8, -3, 0)$, a

$$(B - A) \times (C - A) = (0, 0, 75).$$

Podľa definície 4.1.1 dostávame

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 75.$$

Poznámka. Predošlá definícia formálne závisí od poradia vrcholov trojuholníka. Nasledujúca veta ukazuje, že poradie nie je podstatné.

Veta 4.1.1 *Nech A, B, C sú vrcholy trojuholníka v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$. Potom*

$$\begin{aligned} &S(\triangle ABC) = S(\triangle BCA) = S(\triangle CAB) = S(\triangle CBA) = \\ &= S(\triangle BAC) = S(\triangle ACB). \end{aligned}$$

Dôkaz. Podľa definície 4.1.1 máme

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\|.$$

Keďže $C - A = (C - B) + (B - A)$, potom platí

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(B - A) \times ((C - B) + (B - A))\|.$$

Využitím vlastností vektorového súčinu dostávame

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\|((B - A) \times (C - B)) + ((B - A) \times (B - A))\| = \\ &= \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - B)\| = \frac{1}{2}\| - ((A - B) \times (C - B))\| = \\ &= \frac{1}{2}\|(C - B) \times (A - B)\| = S(\triangle BCA). \end{aligned}$$

Podobným spôsobom dokážeme aj rovnosti $S(\triangle ABC) = S(\triangle BAC)$, $S(\triangle ABC) = S(\triangle CAB)$, $S(\triangle ABC) = S(\triangle ACB)$ a $S(\triangle ABC) = S(\triangle CBA)$.

q.e.d.

Veta 4.1.2 *Nech ABC je trojuholník euklidoského priestoru $\mathbb{E}_n$. Potom*

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\, d(A, C)\, d(B, C) \sin(od(A - C, B - C)).$$

Dôkaz. Pre ilustráciu viď obr. 29.

Obr. 29:

Podľa definície 4.1.1 a podľa vety 1.3.2 platí

$$S(\triangle CAB) = \frac{1}{2}\|(A - C) \times (B - C)\| = \frac{1}{2}\|A - C\|\|B - C\| \sin(od(A - C, B - C)).$$

Keďže $\|A - C\| = d(A, C)$ a $\|B - C\| = d(B, C)$, potom dostávame

$$S(\triangle CAB) = \frac{1}{2}\, d(A, C)\, d(B, C) \sin(od(A - C, B - C)).$$

Obsah trojuholníka podľa vety 4.1.1 nezávisí na usporiadaní vrcholov. Teda máme

$$S(\triangle ABC) = S(\triangle CAB) = \frac{1}{2}\, d(A, C)\, d(B, C) \sin(od(A - C, B - C)).$$

q.e.d

Príklad 4.1.2 Vypočítajte obsah rovnostranného trojuholníka ABC so stranou dĺžky a.

Riešenie. Keďže v rovnostrannom trojuholníku $od(A-C, B-C) = \frac{\pi}{3}$, potom podľa vety 4.1.2 máme

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Veta 4.1.3 *Nech p je priamka prechádzajúca vrcholmi A a B trojuholníka ABC. Potom*

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\, d(A,B)\, d(C,p).$$

Dôkaz. Nech q je priamka kolmá na priamku p a prechádzajúca bodom C.

Obr. 30:

Označme P priesečník priamok p a q (viď obr. 30).

Podľa definície 4.1.1 a podľa vety 1.3.4 platí

$$\begin{aligned}
S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\|(B-A)\times(C-A)\| = \\
&= \frac{1}{2}\|(B-A)\times((C-P)+(P-A))\| = \\
&= \frac{1}{2}\|((B-A)\times(C-P))+((B-A)\times(P-A))\|.
\end{aligned}$$

Keďže vektory $B-A$ a $P-A$ sú lineárne závislé, potom podľa dôsledku 1.3.3 máme

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(B-A)\times(C-P)\|.$$

Podľa vety 1.3.2 dostávame

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|B-A\|\|C-P\|\sin(od(B-A, C-P)).$$

Vektory $B-A$ a $C-P$ sú navzájom kolmé, čiže ich odchýlka je rovná $\frac{\pi}{2}$. Teda platí

$$\begin{aligned}
S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\|B-A\|\|C-P\|\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\|B-A\|\|C-P\| = \\
&= \frac{1}{2}\, d(A,B)\, d(C,P).
\end{aligned}$$

Vzdialenosť bodu C a priamky p je podľa vety 3.1.1 rovná vzdialenosti bodov C a P. Čiže máme

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\, d(A,B)\, d(C,p).$$

q.e.d.

Príklad 4.1.3 Vypočítajte obsah rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou dĺžky z a ramenami dĺžky b.

Riešenie. Nech p je priamka obsahujúca body A a B.

Keďže v rovnoramennom trojuholníku výška prechádza stredom S základne trojuholníka, potom vzdialenosť bodu C a priamky p vypočítame pomocou Pytagorovej vety z pravouhlého trojuholníka BSC. Teda platí

$$d(C,p) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4b^2 - z^2}}{2}.$$

Podľa vety 4.1.3 máme

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - z^2}}{2} = \frac{1}{4} \cdot z \cdot \sqrt{4b^2 - z^2}.$$

Veta 4.1.4 *Nech ABC je trojuholník euklidovského priestoru $\mathbb{E}_n$. Nech $c = d(A,B)$, $a = d(B,C)$, $b = d(A,C)$ a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Potom*

$$S(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dôkaz. Podľa definície 4.1.1 a lemy 1.3.1 máme

$$\begin{aligned} S^2(\triangle ABC) &= \frac{1}{4}\|(B-A) \times (C-A)\|^2 = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|B-A\|^2\|C-A\|^2 - ((B-A)\cdot(C-A))^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(c^2b^2 - ((B-A)\cdot(C-A))^2\right). \end{aligned}$$

Keďže podľa vety 1.2.2 platí

$$(B-A)\cdot(C-A) = \frac{1}{2}(\|B-A\|^2 + \|C-A\|^2 - \|(B-A)-(C-A)\|^2),$$

potom dostávame

$$\begin{aligned} S^2(\triangle ABC) &= \frac{1}{4}\left(c^2b^2 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{16}\left(4c^2b^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right) = \\ &= \frac{1}{16}\left(2cb - (b^2+c^2-a^2)\right)\left(2cb + (b^2+c^2-a^2)\right) = \\ &= \frac{1}{16}\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right) = \\ &= \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{b+c+a}{2}. \end{aligned}$$

Keďže $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, potom máme

$$S^2(\triangle ABC) = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Teda

$$S(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

q.e.d.

Poznámka. Rovnosť $S(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ zvykneme nazývať Herónov vzorec.

Príklad 4.1.4 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak sú dané dĺžky strán,
a) 3, 4, 5;
b) 3, 5, 10.

Riešenie. a) Keďže $s = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$, potom podľa vety 4.1.4 platí

$$S(\triangle ABC) = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = 6.$$

b) Keďže $s = \frac{1}{2}(3+5+10) = 9$, potom podľa vety 4.1.4 platí

$$S(\triangle ABC) = \sqrt{9(9-3)(9-5)(9-10)} = \sqrt{-216}.$$

Odmocnina zo záporného čísla nie je definovaná, teda takto zadaný trojuholník neexistuje.

Príklad 4.1.5 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak $A = [-3,-2]$, $B = [-1,4]$ a ťažisko $T = \left[-\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

Riešenie. Nech p je priamka prechádzajúca bodmi A a B (viď obr. 31). Teda

Obr. 31:

$B - A = (2,6)$ je smerový vektor priamky p a $\vec{n} = (-3,1)$ je jej normálový vektor. Všeobecné vyjadrenie priamky p potom je

$$-3x + y - 7 = 0.$$

Podľa definície vzdialenosti dvoch bodov dostávame

$$d(A,B) = \sqrt{(-1+3)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}.$$

Stred úsečky $\overline{AB}$ má súradnice $S = [-2, 1]$. Teda vektor $T - S = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

Keďže ťažisko rozdeľuje ťažnice trojuholníka v pomere $1 : 2$, pre bod C platí

$$C = S + 3(T - S).$$

Čiže dostávame

$$C = \left[-2 + 3\frac{7}{4}, 1 + 3\frac{1}{3}\right] = \left[\frac{13}{4}, 2\right].$$

Vzdialenosť bodu C a priamky p je podľa vety 3.1.4 rovná

$$d(C, p) = \frac{\left|-3 \cdot \frac{13}{4} + 1.2 - 7\right|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{59\sqrt{10}}{40}.$$

Podľa vety 4.1.3 dostávame

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{59\sqrt{10}}{40} = \frac{59}{4}.$$

Cvičenia

4.1.1 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak

a) $A = [2, 3]$, $B = [-3, 5]$, $C = [-1, 6]$;

b) $A = [-1, 1]$, $B = [5, 4]$, $C = [2, 7]$;

c) $A = [-2, 1, -1]$, $B = [6, 5, 0]$, $C = [1, 6, 2]$;

d) $A = [0, 2, 5]$, $B = [4, 0, 2]$, $C = [5, 3, 0]$.

4.1.2 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak $B - A = \vec{a} - 2\vec{b}$, $C - A = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 6$ a $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4.1.3 Určte obsah trojuholníka, ohraničeného priamkou $5x - 3y + 2 = 0$ a súradnicovými osami.

4.1.4 Body $A = [5, 1]$, $B = [-2, 2]$ sú dva vrcholy trojuholníka, ktorého obsah je 10. Určte súradnice tretieho vrchola trojuholníka, ak viete, že leží na osi x.

4.1.5 Určte súradnice vrchola C trojuholníka ABC, ktorého ťažisko leží na osi x, ak $A = [3, 1]$, $B = [1, -3]$ a $S(\triangle ABC) = 3$.

4.1.6 Vypočítajte obsah rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB, ak $A = [1, 1]$, $B = [3, 2]$ a bod C leží na priamke $p : 3x + 4y - 2 = 0$.

4.1.7 Určte analytické vyjadrenie priamky, na ktorej leží strana trojuholníka prechádzajúca bodom M, ak ostatné dve strany trojuholníka ležia na súradnicových osiach x, y a obsah trojuholníka je S, ak

a) $M = [12, 6]$, $S = 150$;

b) $M = [3, 4]$, $S = 24$.

Výsledky

4.1.1 a) $S = \frac{9}{2}$, b) $S = \frac{36}{2}$, c) $\frac{7}{2}\sqrt{26}$, d) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$. **4.1.2** $S = 72\sqrt{2}$. **4.1.3** $S = \frac{2}{15}$. **4.1.4** $C = [-8, 0]$, $C = [32, 0]$. **4.1.5** $C = [5, 2]$, $C = [2, 2]$. **4.1.6** $S = \frac{3\sqrt{10}}{8}$. **4.1.7** a) $x + 3y - 30 = 0$, $3x + 4y - 60 = 0$, $3x - y - 30 = 0$, $x - 12y + 60 = 0$, b) $4x + 3y - 24 = 0$.

4.2 Obsah mnohouholníka

Pri výpočte obsahov mnohouholníkov budeme vychádzať z toho, že každý mnohouholník sa dá rozložiť na trojuholníky, prienikom ktorých je buď prázdna množina, bod alebo úsečka.

Definícia 4.2.1 *Obsahom mnohouholníka M rozumieme reálne číslo $S(M)$, pre ktoré platí*

a) ak M je trojuholník ABC, tak

$$S(M) = S(\triangle ABC),$$

b) ak $M = M_1 \cup M_2$, pričom M_1, M_2 sú mnohouholníky a $M_1 \cap M_2$ je buď prázdna množina, bod alebo úsečka, tak

$$S(M) = S(M_1) + S(M_2).$$

Veta 4.2.1 *Pre obsah $S(ABCD)$ rovnobežníka $ABCD$ v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$ platí*

$$S(ABCD) = \|(B - A) \times (D - A)\|.$$

Obr. 32: Obsah rovnobežníka $ABCD$

Dôkaz. Rovnobežník $ABCD$ je zjednotením trojuholníkov ABD a BCD, prienikom ktorých je úsečka $\overline{BD}$ (viď obr. 32). Teda obsah rovnobežníka $ABCD$ je súčtom obsahov trojuholníkov ABD a BCD. Čiže máme

$$S(ABCD) = S(\triangle ABD) + S(\triangle BCD).$$

Podľa definície 4.1.1 platí

$$S(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\|(B - A) \times (D - A)\|.$$

Keďže $C - B = D - A$ a $C - D = B - A$, potom využitím vlastností vektorového súčinu a vety 4.1.1 máme

$$\begin{aligned} S(\triangle ABD) &= \frac{1}{2}\|(C-D)\times(C-B)\| = \frac{1}{2}\|(D-C)\times(B-C)\| = \\ &= S(\triangle CDB) = S(\triangle BCD). \end{aligned}$$

Teda dostávame

$$S(ABCD) = 2S(\triangle ABD) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\|(B-A)\times(D-A)\|.$$

q.e.d.

Príklad 4.2.1 Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak $A = [7, -5, 6]$, $B = [9, -4, 8]$ a $D = [6, 0, 6]$.

Riešenie. Keďže $B - A = (2, 1, 2)$ a $D - A = (-1, 5, 0)$, potom podľa vety 4.2.1 dostávame

$$S(ABCD) = \|(2,1,2)\times(-1,5,0)\| = 15.$$

Príklad 4.2.2 Vypočítajte obsah päťuholníka $ABCDE$, ak $A = [0, 0, 5]$, $B = [1, -3, 5]$, $C = [4, 2, 5]$, $D = [7, 5, 5]$, $E = [3, 5, 5]$.

Riešenie. Mnohouholník $ABCDE$ je zjednotením trojuholníkov ABC, ACD a ADE (viď obr. 33).

Obr. 33: Kolmý priemet mnohouholníka $ABCDE$ do roviny xy

Prienik trojuholníka ABC a trojuholníka ACD je úsečka AC, prienik trojuholníka ABC a trojuholníka ADE je bod A, prienik trojuholníka ACD a trojuholníka ADE je úsečka AD.

Teda podľa definície 4.2.1 platí

$$S(ABCDE) = S(\triangle ABC) + S(\triangle ACD) + S(\triangle ADE).$$

Vypočítajme obsahy jednotlivých trojuholníkov.
Zrejme $B - A = (1, -3, 0)$ a $C - A = (4, 2, 0)$, potom podľa definície 1.3.1 máme $(B - A) \times (C - A) = (0, 0, 14)$.

Podľa definície 4.1.1 platí

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\|(B-A)\times(C-A)\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+14^2} = 7.$$

Podobne $D - A = (7, 5, 0)$, $(C - A) \times (D - A) = (0, 0, 6)$, a

$$S(\triangle ACD) = \frac{1}{2}\|(C - A) \times (D - A)\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2} = 3.$$

Analogicky $E - A = (3, 5, 0)$, $(D - A) \times (E - A) = (0, 0, 20)$, a

$$S(\triangle ADE) = \frac{1}{2}\|(D - A) \times (E - A)\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 20^2} = 10.$$

Teda máme

$$S(ABCDE) = 7 + 3 + 10 = 20.$$

Cvičenia

4.2.1 Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak $A = [7, -5, 6]$, $B = [9, -4, 8]$ a $C = [6, 0, 6]$.

4.2.2 Vypočítajte obsah rovnobežníka $ABCD$, ak $C - A = 3\vec{a} + \vec{b}$, $D - B = \vec{a} - 5\vec{b}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ a $od(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4.2.3 Vypočítajte obsah štvorca, ak veľkosť jeho uhlopriečky je 6.

4.2.4 Vypočítajte obsah obdĺžnika, ak veľkosť jeho uhlopriečky je 76 a odchýlka uhlopriečok je $\frac{\pi}{6}$.

4.2.5 Vypočítajte obsah kosoštvorca, ak $d(A, B) = 4,3$ a veľkosť polomeru vpísanej kružnice je $r = 1,2$.

4.2.6 Vypočítajte obsah pravidelného desaťuholníka, ak veľkosť polomeru jemu opísanej kružnice je 26.

4.2.7 Vypočítajte obsah pravidelného päťuholníka, ak veľkosť jeho uhlopriečky je 50.

4.2.8 Vypočítajte obsah štvoruholníka $ABCD$ znázorneného na obr. 34.

Obr. 34: Štvoruholník $ABCD$

Výsledky

4.2.1 $S = 15$. **4.2.2** $4\sqrt{2}$. **4.2.3** $S = 18$. **4.2.4** $S = 152$. **4.2.5** $S = 10,32$. **4.2.6** $S = 260 \sin \frac{\pi}{5}$. **4.2.7** $S = \frac{5u^2}{8 \sin \frac{2\pi}{5}}$. **4.2.8** $S = 3200 \operatorname{cotg} \frac{4\pi}{9} + 8985$.

5 Objemy mnohostenov

5.1 Objem štvorstena

Definícia 5.1.1 *Objemom štvortena $ABCD$ v priestore $\mathbb{E}_3$ rozumieme reálne číslo $V(ABCD)$, pre ktoré platí*

$$V(ABCD) = \frac{1}{6} \left|\langle B - A, C - A, D - A \rangle\right| .$$

Príklad 5.1.1 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$.

Riešenie. Keďže $B - A = (0, 2, -3)$, $C - A = (1, 6, -8)$ a $D - A = (-4, 8, 1)$, potom podľa definície 5.1.1 platí

$$V(ABCD) \quad = \quad \frac{1}{6}|((0, 2, -3) \times (1, 6, -8) \cdot (-4, 8, 1))| = \frac{17}{3}.$$

Poznámka. Predošlá definícia formálne závisí od poradia vrcholov štvorstena. Nasledujúca veta ukazuje, že poradie nie je podstatné. Pre ilustráciu dokážeme len jednu rovnosť.

Veta 5.1.1 *Nech A, B, C, D sú vrcholy štvorstena v euklidovskom priestore $\mathbb{E}_3$. Potom*

$$V(ABCD) = V(ACDB).$$

Dôkaz. Podľa definície 5.1.1 a z vlastností zmiešaného súčinu dostávame

$$\begin{aligned} V(ABCD) &= \frac{1}{6}|\langle B - A, C - A, D - A \rangle| = \\ &= \frac{1}{6}|\langle C - A, D - A, B - A \rangle| = V(ACDB). \end{aligned}$$

q.e.d.

Veta 5.1.2 *Nech α je rovina obsahujúca vrcholy A, B, C štvorstena $ABCD$. Potom pre objem štvorstena $ABCD$ platí*

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} S(\triangle ABC)\, d(D, \alpha).$$

Dôkaz. Označme $\vec{v} = (B - A) \times (C - A)$. Nech q je priamka kolmá na rovinu

Obr. 35:

α a prechádzajúca bodom D. Nech P je priesečník priamky q a roviny α (viď obr. 35).

Podľa definície 5.1.1 máme

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}\left|\langle B - A, C - A, D - A\rangle\right|.$$

Keďže $D - A = (D - P) + (P - A)$, potom podľa vety 1.2.2 dostávame

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}\left|\vec{v}\cdot((D - P) + (P - A))\right| = \frac{1}{6}|\vec{v}\cdot(D - P) + \vec{v}\cdot(P - A)|.$$

Vektory $\vec{v}$ a $P - A$ sú navzájom kolmé, teda ich skalárny súčin je rovný nule. Čiže

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}|\vec{v}\cdot(D - P)|.$$

Podľa lemy 1.3.1 dostávame

$$V^2(ABCD) = \frac{1}{36}(\vec{v}\cdot(D - P))^2 = \frac{1}{36}\left(\|\vec{v}\|^2\|D - P\|^2 - \|\vec{v}\times(D - P)\|^2\right).$$

Keďže vektory $\vec{v}$ a $D - P$ sú lineárne závislé, potom ich vektorový súčin je podľa dôsledku 1.3.3 rovný nule. Veľkosť vektora je podľa vety 1.1.2 nezáporné reálne číslo, teda dostávame

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}\|\vec{v}\|\|D - P\|.$$

Vzdialenosť bodu D a bodu P (teda $\|D - P\|$) je podľa vety 3.2.1 rovná vzdialenosti bodu D a roviny α. A podľa definície 4.1.1 platí $\|\vec{v}\| = 2S(\triangle ABC)$. Teda

$$V(ABCD) = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot S(\triangle ABC)\cdot d(D,\alpha) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC)\, d(D,\alpha).$$

q.e.d.

Príklad 5.1.2 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak $S(\triangle ABC) = 24$, $D = [4, 2, 1]$ a rovina $\alpha : 5x - 4y + 3z = 0$ prechádza bodmi A, B, C.

Riešenie. Vzdialenosť bodu D a roviny α je podľa vety 3.2.3 rovná

$$d(D,\alpha) = \frac{|5.4 + (-4).2 + 3.1|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Podľa vety 5.1.2 máme

$$V(ABCD) = \frac{1}{3}\cdot 24\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}.$$

Obr. 36:

Príklad 5.1.3 Vypočítajte objem pravidelného štvorstena $ABCD$ so stranou veľkosti a.

Riešenie.

Keďže štvorsten $ABCD$ je pravidelný, potom $a = d(A,B) = d(A,C) = = d(B,C) = d(A,D)$. Teda obsah trojuholníka ABC je podľa vety 4.1.4 rovný

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \sqrt{\left(\frac{a+a+a}{2}\right)\left(\frac{a+a+a}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+a}{2}-a\right)\left(\frac{a+a+a}{2}-a\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}. \end{aligned}$$

Výška v rovnostrannom trojuholníku je kolmá na protiľahlú stranu a zároveň spája vrchol so stredom protiľahlej strany (je zároveň aj ťažnicou trojuholníka). Označme S stred strany BC (viď obr. 36). Z pravouhlého trojuholníka ASB pomocou Pytagorovej vety vypočítame vzdialenosť bodov A a S. Teda

$$\begin{aligned} d^2(A,S) &= d^2(A,B) - d^2(S,B) \\ d(A,S) &= \frac{\sqrt{3}a}{2}. \end{aligned}$$

Ak T je ťažisko trojuholníka ABC, tak platí

$$\begin{aligned} d(A,T) &= \frac{2}{3}\, d(A,S) \\ d(A,T) &= \frac{\sqrt{3}a}{3}. \end{aligned}$$

Z pravouhlého trojuholníka ATD pomocou Pytagorovej vety máme

$$\begin{aligned} d(D,T)^2 &= d(A,D)^2 - d(A,T)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \\ d(D,T) &= \frac{\sqrt{6}a}{3}. \end{aligned}$$

Vzdialenosť bodu D a roviny obsahujúcej trojuholník ABC je rovná vzdialenosti bodov D a T. Čiže podľa vety 5.1.2

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3.$$

Cvičenia

5.1.1 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak
a) $A = [-3, -2, 5]$, $B = [-3, 0, 2]$, $C = [-2, 4, -3]$, $D = [-7, 6, 6]$;
b) $A = [1, 2, 0]$, $B = [1, 1, 1]$, $C = [0, -1, 2]$, $D = [2, 2, 0]$;
c) $A = [1, -1, 2]$, $B = [2, 0, -2]$, $C = [3, -2, 0]$, $D = [1, 1, 1]$.

5.1.2 Objem štvorstena $ABCD$ je $V = 5$. Tri jeho vrcholy sú $A = [2, 1, -1]$, $B = [3, 0, 1]$, $C = [2, -1, 3]$. Vypočítajte súradnice vrchola D, ktorý leží na osi y.

5.1.3 Štvorsten $ABCD$ má objem $V = 2$. Jeho tri vrcholy sú $A = [2, 1, 3]$, $B = [3, 3, 2]$, $C = [1, 2, 4]$. Vypočítajte súradnice štvrtého vrchola D, ak leží na osi z.

5.1.4 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak $A = [1, 1, 1]$, $B = [1, -1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$, $D \in p$, pričom $p : x = 1 + (\sqrt{3} - 2)t, y = t, z = 1$ a odchýlka priamky obsahujúcej hranu AD a roviny ABC je $\frac{\pi}{6}$.

Výsledky

5.1.1 a) $V = \frac{17}{3}$, b) $V = \frac{5}{6}$, c) $V = \frac{3}{2}$. **5.1.2** $D = [0, -7, 0]$, $D = [0, 8, 0]$. **5.1.3** $D = [0, 0, 9]$, $D = [0, 0, 1]$. **5.1.4** $\frac{5}{132}(5 - \sqrt{3})$.

5.2 Objem mnohostena

Definícia 5.2.1 *Objemom mnohostena M rozumieme reálne číslo $V(M)$, pre ktoré platí:*
a) ak M je štvorsten $ABCD$, tak

$$V(M) = V(ABCD),$$

b) ak $M = M_1 \cup M_2$, pričom M_1, M_2 sú mnohosteny a $M_1 \cap M_2$ je prázdna množina, bod, úsečka alebo mnohouholník tak

$$V(M) = V(M_1) + V(M_2).$$

Veta 5.2.1 *Nech M je mnohouholník priestoru E_3, nech α je rovina obsahujúca mnohouholník M. Nech R je bod euklidovského priestoru nepatriaci α. Potom pre objem ihlana I s podstavou M a vrcholom R platí*

$$V(I) = \frac{1}{3} S(M)\, d(R, \alpha).$$

Dôkaz. Nech M je k-uholník $A_1A_2\dots A_k$, $k \geq 3$. Dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na k.

I. Nech $k = 3$. Teda M je trojuholník $A_1A_2A_3$. Ihlan s podstavou $A_1A_2A_3$ a vrcholom R je štvorsten $A_1A_2A_3R$. Teda objem ihlana I je rovný objemu štvorstena $A_1A_2A_3R$. Podľa vety 5.1.2 máme

$$V(I) = \frac{1}{3}\,S(M)\,d(R,\alpha).$$

II. Predpokladáme, že veta platí pre ihlany s t-uholníkovou podstavou, kde $3 \leq t < k$.

Ihlan I je zjednotením štvorstena $A_1A_2A_3R$ a ihlana $A_1A_3\dots A_kR$. Pričom ich prienikom je trojuholník A_1A_3R.

Podľa definície 5.2.1 máme

$$V(I) = V(A_1A_2A_3R) + V(A_1A_3\dots A_kR).$$

Využitím indukčného predpokladu dostávame

$$\begin{aligned} V(I) &= \frac{1}{3}\,S(A_1A_2A_3)\,d(R,\alpha) + \frac{1}{3}\,S(A_1A_3\dots A_k)\,d(R,\alpha) = \\ &= \frac{1}{3}\,d(R,\alpha)\left(S(A_1A_2A_3) + S(A_1A_3\dots A_k)\right). \end{aligned}$$

Keďže mnohouholník M je zjednotením trojuholníka $A_1A_2A_3$ a $(k-1)$–uholníka $A_1A_3\dots A_k$, pričom ich prienik je úsečka A_1A_3, potom podľa definície 4.2.1 dostávame

$$S(M) = S(A_1A_2A_3) + S(A_1A_3\dots A_k).$$

Teda máme

$$V(I) = \frac{1}{3}\,S(M)\,d(R,\alpha).$$

q.e.d.

Príklad 5.2.1 Vypočítajte objem ihlana I s podstavou M a vrcholom R, ak $S(M) = 30$, $R = [3,2,1]$ a rovina $\alpha : 4x - 5y - z - 3 = 0$ obsahuje podstavu M.

Riešenie. Vzdialenosť bodu R a roviny α je podľa vety 3.2.3 rovná

$$d(R,\alpha) = \frac{|4.3 - 5.2 - 1.1 - 3|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{42}}{21}.$$

Teda podľa vety 5.2.1 dostávame

$$V(I) = \frac{1}{3}\cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{42}}{21} = \frac{10\sqrt{42}}{21}.$$

Veta 5.2.2 *Nech $ABCDEFGH$ je rovnobežnosten euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$. Potom pre objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$ platí*

$$V(ABCDEFGH) = |\langle A - B, C - B, F - B \rangle|.$$

Obr. 37: Rovnobežnosten $ABCDEFGH$

Dôkaz. Označme M rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Rovnobežnosten M možno rozložiť na šesť štvorstenov $ABCF$, $CDAF$, $ADEF$, $EFGD$, $GHED$, $GFCD$ (viď obr. 37), pričom prienik každej dvojice štvorstenov je úsečka alebo mnohouholník. Čiže podľa definície 5.2.1 platí

$$\begin{aligned} V(M) &= V(ABCF) + V(CDAF) + V(ADEF) + V(EFGD) \\ &+ V(GHED) + V(GFCD). \end{aligned}$$

Podľa definície 4.1.1 a využitím vlastností vektorového súčinu platí

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}\|(B - A) \times (C - A)\|, \\ S(\triangle CDA) &= \frac{1}{2}\|(D - C) \times (A - C)\| = \frac{1}{2}\|(C - D) \times (C - A)\|, \\ S(\triangle EFG) &= \frac{1}{2}\|(F - E) \times (G - E)\|, \\ S(\triangle GHE) &= \frac{1}{2}\|(H - G) \times (E - G)\| = \frac{1}{2}\|(G - H) \times (G - E)\|. \end{aligned}$$

Keďže $B - A = C - D = F - E = G - H$ a $C - A = G - E$, tak dostávame

$$S(\triangle ABC) = S(\triangle CDA) = S(\triangle EFG) = S(\triangle GHE).$$

Podobne podľa definície 4.1.1 a využitím vlastností vektorového súčinu platí

$$\begin{aligned} S(\triangle ADE) &= \frac{1}{2}\|(D - A) \times (E - A)\|, \\ S(\triangle GFC) &= \frac{1}{2}\|(F - G) \times (C - G)\| = \frac{1}{2}\|(G - F) \times (G - C)\|. \end{aligned}$$

Keďže $D - A = G - F$ a $E - A = G - C$, potom platí

$$S(\triangle ADE) = S(\triangle GFC).$$

Analogicky

$$S(\triangle ADF) = S(\triangle GFD).$$

Veľkosti výšok a obsahy podstáv štvorstenov $ABCF$, $CDAF$, $EFGD$, $GHED$ sú rovnaké a tiež veľkosti výšok a obsahy podstáv štvorstenov $ADEF$, $GFCD$ sú rovnaké a podobne veľkosti výšok a obsahy podstáv štvorstenov $ADFC$, $GFDE$ sú rovnaké.

Podľa vety 5.1.2 dostávame

$$V(ABCF) = V(CDAF) = V(EFGD) = V(GHED),$$

a zároveň

$$V(ADFC) = V(GFDC),$$

a tiež

$$V(GFCD) = V(ADEF).$$

Keďže podľa vety 4.1.1 výpočet objemu štvorstena nezávisí na poradí vrcholov, potom platí $V(CDAF) = V(ADFC)$ a $V(GFDC) = V(GFCD)$. Teda máme

$$V(ABCF) = V(CDAF) = V(EFGD) = V(GHED) = V(ADEF) = V(GFCD).$$

Čiže

$$V(M) = 6V(ABCF) = 6V(BACF) = |\langle A - B, C - B, F - B\rangle|.$$

q.e.d.

Príklad 5.2.2 Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak $A = [-1, 2, -4]$, $B = [2, 3, 0]$, $D = [-2, 7, -4]$, $E = [1, -1, -6]$.

Riešenie. Keďže $B - A = (3, 1, 4)$, $D - A = (-1, 5, 0)$, $E - A = (2, -3, -2)$, potom podľa vety 5.2.2 máme

$$V(ABCDEFGH) = |\langle(3, 1, 4), (-1, 5, 0), (2, -3, -2)\rangle| = 60.$$

Veta 5.2.3 *Nech $ABCDEFGH$ je rovnobežnosten euklidovského priestoru $\mathbb{E}_3$ a α je rovina obsahujúca body A, B, C a D. Potom pre objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$ platí*

$$V(ABCDEFGH) = S(ABCD)\, d(F, \alpha).$$

Dôkaz. Označme $\vec{v} = (A - B) \times (C - B)$. Nech q je priamka kolmá na rovinu α a prechádzajúca bodom F. Nech P je priesečník priamky q a roviny α.

Podľa vety 5.2.2 máme

$$V(ABCDEFGH) = |\langle A - B, C - B, F - B\rangle|.$$

Keďže $F - B = (F - P) + (P - B)$, potom podľa vety 1.2.2 dostávame

$$V(ABCDEFGH) = |\vec{v} \cdot ((F - P) + (P - B))| = |\vec{v} \cdot (F - P) + \vec{v} \cdot (P - B)|.$$

Vektory $\vec{v}$ a $P - B$ sú navzájom kolmé, teda ich skalárny súčin je rovný nule. Čiže

$$V(ABCDEFGH) = |\vec{v} \cdot (F - P)|.$$

Keďže vektory $\vec{v}$ a $F - P$ sú lineárne závislé, potom platí

$$V(ABCDEFGH) = \|\vec{v}\|\|F - P\|.$$

Vzdialenosť bodu F a bodu P (teda $\|D - P\|$) je podľa vety 3.2.1 rovná vzdialenosti bodu E a roviny α. Podľa vety 4.2.1 platí $\|\vec{v}\| = S(ABCD)$. Teda

$$V(ABCDEFGH) = S(ABCD)\, d(F, \alpha).$$

q.e.d.

Príklad 5.2.3 Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak $S(ABCD) = 69$, $E = [2, 3, -1]$ a rovina $\alpha : 2x - 4y + 7z - 1 = 0$ prechádza bodmi A, B, C a D.

Riešenie. Vzdialenosť bodu E a roviny α je podľa vety 3.2.3 rovná

$$d(E, \alpha) = \frac{2.2 + (-4).3 + 7.(-1) - 1}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \frac{16\sqrt{69}}{69}.$$

Podľa vety 5.2.3 máme

$$V(ABCDEFGH) = 69 \cdot \frac{16\sqrt{69}}{69} = 16\sqrt{69}.$$

Príklad 5.2.4 Vypočítajte objem pravidelného štvorbokého hranola $ABCDEFGH$, ak odchýlka telesovej uhlopriečky hranola a podstavy je $\frac{\pi}{3}$ a veľkosť hrany podstavy je 10.

Riešenie. Keďže podstavou hranola je štvorec $ABCD$, potom podľa definície 4.2.1 a vety 4.1.2 máme

$$S(ABCD) = 2(\triangle ABC) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 100.$$

Dĺžku strany AC vypočítame pomocou Pytagorovej vety z pravouhlého trojuholníka ABC. Teda

$$d(A,C) = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}.$$

Vzdialenosť bodu E a roviny α je rovná vzdialenosti bodov E a A. Trojuholník ACE je pravouhlý a teda vzdialenosť bodov E a A vypočítame pomocou goniometrickej funkcie tangens. Čiže

$$d(A,E) = d(A,C)\ \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = 10\sqrt{6}.$$

Podľa vety 5.2.3 máme

$$V(ABCDEFGH) = 100.10.\sqrt{6} = 1000\sqrt{6}$$

.

Cvičenia

5.2.1 Vypočítajte objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$, ak
a) $A = [3,4,0]$, $B = [9,5,-1]$, $D = [1,7,1]$, $E = [3,2,5]$;
b) $A = [1,2,1]$, $B = [7,3,0]$, $D = [-1,5,2]$, $E = [1,0,6]$.

5.2.2 Vypočítajte objem kocky, ktorej dve steny ležia v rovinách
a) $2x - 2y + z + 5 = 0$, $2x - 2y + z + 2 = 0$;
b) $3x - 4z + 8 = 0$, $6x - 8z - 4 = 0$.

5.2.3 Vypočítajte objem kolmého hranola, ak
a) veľkosť výšky je $60,8$ a podstava je pravouhlý trojuholník s odvesnami veľkosti $40,4$ a 43;
b) veľkosť výšky je $17,5$ a podstava je rovnoramenný trojuholník, veľkosť základne je $5,8$ a veľkosť ramena je $3,7$;
c) veľkosť výšky je $9,6$ a podstava je rovnostranný trojuholník so stranou veľkosti $4,8$.

5.2.4 Vypočítajte objem kolmého pravidelného šesťbokého ihlana, ak veľkosť hrany je 1,8 a veľkosť výšky je 2,4.

5.2.5 Pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$ má vrchol v bode $V = [3,-1,6]$, hrana CD leží na priesečnici rovín $p : 3x + 3y + z = 0$, $x + y + z - 2 = 0$. Objem ihlana je 18, odchýlka priamky obsahujúcej hranu AV a priamky obsahujúcej hranu VC je $\frac{\pi}{2}$. Vypočítajte súradnice ostatných vrcholov ihlana $ABCDV$.

Výsledky

5.2.1 a) 108, b) 108. **5.2.2** a) 1, b) 8. **5.2.3** a) $52,8$; b) $116,6$; c) $95,8$. **5.2.4** $V = 6,74$. **5.2.5** $A = [-1,-2,7]$, $B = [2,-5,7]$, $C = [3,-4,3]$, $D = [0,-1,3]$, $A = [3,2,3]$, $B = [6,-1,3]$, $C = [3,-4,3]$, $D = [0,-1,3]$.

Literatúra

[1] Peter Kaprálik, Jozef Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie* , Alfa, Bratislava, 1987.

[2] Milan Hejný, Valent Zaťko, Pavel Kršnák: *Geometria 1*, SPN, Bratislava, 1985.

[3] Igor Kluvánek, Ladislav Mišík, Marko Švec: *Matematika I*, Alfa, Bratislava, 1959.

[4] František Jirásek, Karel Braniš, Stanislav Horák, Milan Vacek: *Zbierka úloh z matematiky pre SOŠ a študijné odbory SOU 1.časť*, SNP, Bratislava, 1987.

[5] František Jirásek, Karel Braniš, Stanislav Horák, Milan Vacek: *Zbierka úloh z matematiky pre SOŠ a študijné odbory SOU 2.časť*, SNP, Bratislava, 1990.

[6] Oldřich Odvárko, Miloš Božek, Marta Ryšánková, Jozef Smida: *Matematika pre 2. ročník gymnázia*, SNP, Bratislava, 1985.

[7] Jaroslav Šedivý, Leo Boček, Jozef Polák, Beloslav Riečan: *Matematika pre 3.ročník gymnázia*, SNP, Bratislava, 1991

[8] M. Sekanina a kol. : *Geometrie I*, SNP, Praha 1986

[9] http://www.education.gov.sk/sekcie/szs/stand/stands/matika.htm

[10] http://matematika.fpv.umb.sk/km/stvrty_files/AG_zbierka.pdf